Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

GUIA DO PROFESSOR

Software

Crescimento populacional

Objetivos da unidade

1. Estudar dois modelos de crescimento populacional;
2. Explorar o crescimento exponencial de uma população – o modelo de Malthus;
3. Explorar o crescimento populacional com restrições – o modelo de Verhulst;
4. Fazer análise de gráficos.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Crescimento populacional

Guia do professor

Sinopse

Neste software o aluno vai explorar numérica e graficamente dois modelos matemáticos para descrever o crescimento populacional de seres vivos, o de Malthus e o de Verhulst.

Conteúdos

- Progressão geométrica;
- Função exponencial;
- Crescimento populacional;
- Modelo de Malthus e Modelo de Verhulst.

Objetivos

1. Estudar dois modelos de crescimento populacional;
2. Explorar o crescimento exponencial de uma população – o modelo de Malthus;
3. Explorar o crescimento populacional com restrições – o modelo de Verhulst;
4. Fazer análise de gráficos.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

Recomendamos que o software seja utilizado em duplas e que os alunos tenham lápis e papel disponíveis no laboratório.

Material relacionado

- Vídeo: O sonho;
- Experimento: Eliminando quadrados;
- Áudios: Mais mortos ou mais vivos?, O que é exponencial?

Matemática Multimídia

Introdução

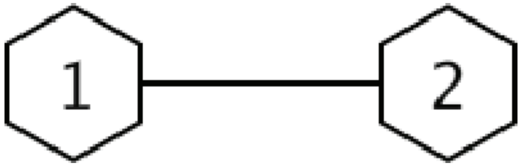
A demografia é o estudo da dinâmica populacional humana e a ecologia se ocupa da distribuição e da interação de seres vivos com o meio ambiente. Nestes contextos, a matemática permite fazer previsões e projeções de forma objetiva, contribuindo para uma melhor compreensão de alguns aspectos da(s) população(ões) em estudo.

Este software permite explorar dois modelos que têm validade comprovada experimentalmente para determinados vínculos ou intervalos de população ou de tempo.

O software

Estrutura do software

O software compreende duas atividades: Modelo de Malthus e Modelo de Verhulst. Ambas são independentes, mas recomendamos fortemente que o aluno resolva primeiro a que se refere ao modelo malthusiano, pois a seguinte exige um domínio maior do conteúdo.



TELA 1 *Mapa do software.*

ATIVIDADE

1 Modelo de Malthus

Esta atividade está dividida em cinco partes, o que permite que o aluno se familiarize com o problema e analise/estude sua representação gráfica.

A PARTE 1, tanto desta quanto da segunda atividade, são apenas introduções aos modelos que serão estudados e seus autores.

Na PARTE 2, o aluno resolve um problema simples: Uma espécie de bactéria de nome *Escherichia coli*, responsável por mais de 50% dos casos de intoxicação alimentar, possui uma taxa de crescimento da sua população de 80% a cada 30 minutos sob condições ideais de ambiente. Como descrever a população desta bactéria após n períodos de meia hora? O aluno deve entender o passo a passo e a expressão da função $P(n) = P(0) \cdot (1,8)^n$ onde $P(0) = 100$ mil é a população inicial.

A representação gráfica sublinha visualmente o comportamento exponencial deste crescimento. O gráfico é retomado na PARTE 3, quando devem ser feitas leituras apropriadas e interpretação dos resultados. A PARTE 4 mostra ao aluno como fazer algumas previsões ou projeções com base na função e no gráfico obtido.

Aí temos, em essência, no que consiste fazer uma modelagem matemática, isto é, uma representação matemática de um fenômeno em estudo. De posse do modelo ajustado a algumas observações, podemos fazer extrapolações ou projeções que por sua vez permitem compreender mais detalhes do fenômeno, ou fazer melhorias na modelagem matemática, caso as projeções não sejam confirmadas de maneira observacional ou experimental.

Finalmente, na PARTE 5, o conceito de taxa de crescimento é abordado. Dada a definição, o software mostra que o modelo desenvolvido tem a propriedade de que a razão entre as populações em períodos consecutivos é constante. Na realidade, esta é a hipótese do modelo inicial (introduzida na parte 2) e esta última parte tem o objetivo de enfatizar a propriedade de taxa constante de crescimento.

ATIVIDADE

2 Modelo de Verhulst

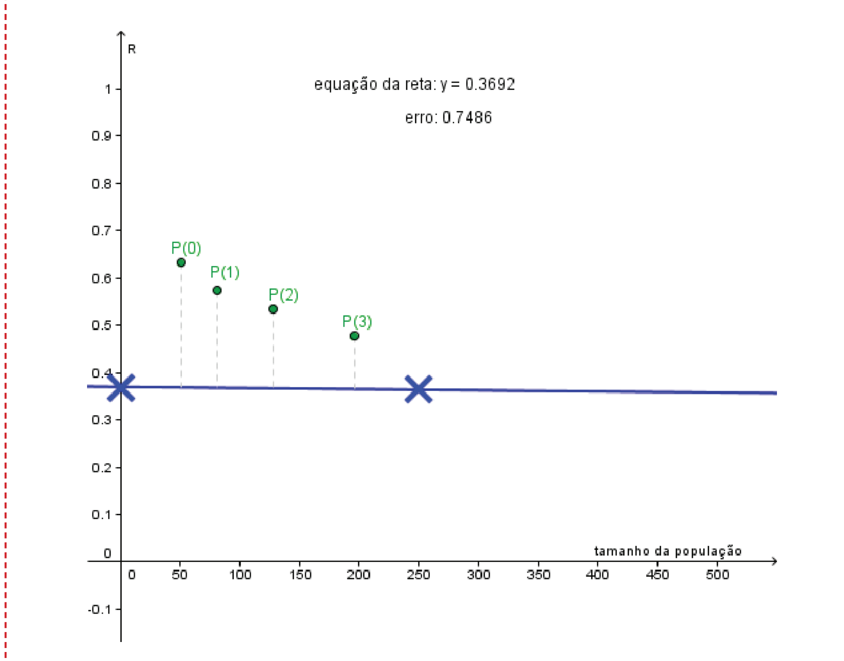
O modelo de Verhulst é mais elaborado que o anterior, de modo que sua compreensão demanda um pouco mais de trabalho. Nele, a população não segue uma progressão geométrica com o tempo e sim uma função mais complicada, chamada de logística.

Na PARTE 2, o aluno é apresentado a alguns dados empíricos de uma população bacteriana, na qual a taxa de crescimento não é constante. O bloco de notas e o gráfico mostram os dados da taxa relativa de crescimento da amostra de bactérias. A definição desta *taxa relativa de crescimento* é

$$R(n) = \frac{P(n+1) - P(n)}{P(n)}$$

É muito importante perceber que o gráfico $(P(n) \times R(n))$ representa o conjunto de pares ordenados população e taxa de crescimento. Por este motivo, as legendas de cada ponto mostram as referências à abscissa $P(n)$ e não à ordenada $R(n)$. O ideal seria indicar o par ordenado, mas o gráfico ficaria poluído visualmente.

Com a ajuda da ferramenta do lado direito, o aluno é convidado a escolher e inserir o segmento de reta que mais se aproxima dos dados observados.



TELA 2

É impossível traçar uma reta exatamente sobre estes quatro pontos dados, pois eles dificilmente estão alinhados. No entanto, o objetivo não é ser exato e sim cometer o menor erro possível. Neste contexto foi usada uma definição de *erro* muito simples e específica para este problema: É a soma das distâncias verticais entre a reta e os pontos da amostra. Esta é a definição subentendida no texto que aparece ao clicar na palavra *erro* na questão 1, mas podemos formulá-la de maneira mais precisa, como segue:

Definição
Seja $y(n)$ a reta no gráfico indicado (para cada valor de n vai haver um valor correspondente de y que modela a $R(n)$, mas a reta mostrada não é $n \times y$ e sim $P(n) \times y(n)$). Com estas notações, o erro considerado é

$$\sum_n |R(n) - y(n)|$$

A ferramenta vai mostrar o erro relativo a reta posicionada com o auxílio dos “pegadores” – um desloca a reta verticalmente enquanto o outro a inclina no sentido horário ou anti-horário; em outras palavras, um deles altera o coeficiente linear e o outro, o angular. O aplicativo mostra também a equação da reta $y = ax + b$. Reforçamos que nesta representação x é a população $P(n)$.

Esta parte é muito importante, pois, além de servir de base para a construção do modelo, mostra um pouco da modelagem matemática. Isto é, a partir de alguns dados observados considera-se uma representação matemática apropriada para eles (neste caso, o ajuste de uma reta a um conjunto de quatro pontos quase alinhados). Em seguida, algumas consequências do modelo podem ser obtidas matematicamente.

Na PARTE 3 o aluno tem a reta que ajustou na PARTE 2 e deve amadurecer o seu significado. Para isto, algumas perguntas são feitas e o aluno poderá respondê-las com a ajuda do gráfico e da tabela. Desse modo, a interpretação de gráficos e a leitura de tabelas são exercitadas.

Na PARTE 4, o aluno vai usar o gráfico ou a equação da reta para obter valores de $R(n)$ para os quais não há dados explícitos de $P(n)$ na tabela. Em particular, ele vai perceber que, para a reta considerada, vai existir uma população na qual a taxa de crescimento é nula.

E finalmente, na PARTE 5, é feito o gráfico dos valores obtidos para a população em função do tempo. Estes pontos podem fazer parte de uma curva logística.

Fechamento

Ao final, temos os dois modelos simples de crescimento populacional: o de Malthus, em que a taxa de crescimento é constante, e o de Verhulst, em que a taxa de crescimento é uma função linear decrescente com a população. Observe-se que, como apresentado na PARTE 5 da ATIVIDADE 2, o modelo de Verhulst indica que a população aumenta até um valor de “estagnação”, como ilustra o gráfico abaixo.

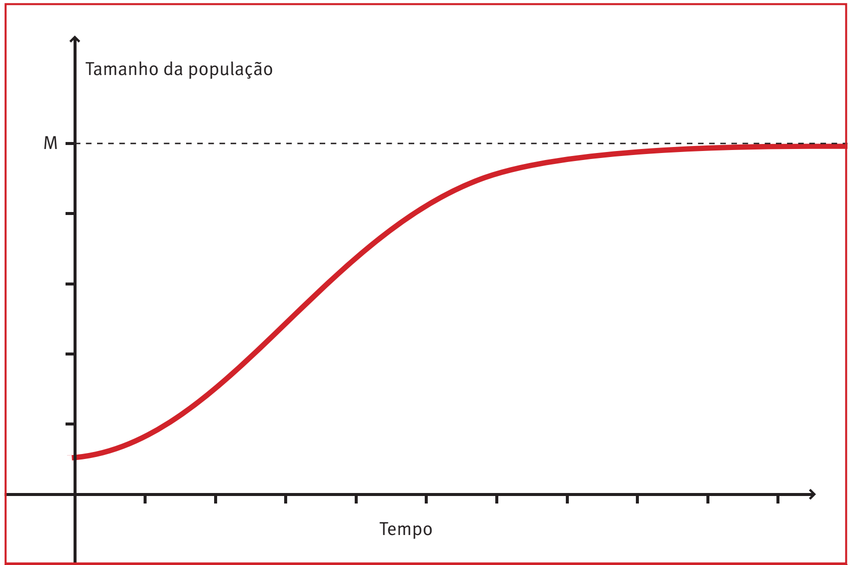


FIG. 1 *Curva da função logística associada ao modelo de Verhulst.*

A interpretação e a validação deste modelo são feitas por demógrafos, sociólogos ou biólogos, conforme o caso em estudo.

Em poucas palavras, podemos dizer que o modelo de Malthus é apropriado para populações que se reproduzem sem restrições do meio ambiente, como uma colônia de bactérias em um ambiente térmico adequado e rico em nutrientes. O modelo de Verhulst, por sua vez, é apropriado para populações que, ao crescer, enfrentam restrições de espaço, suplementos ou competições com outras espécies.

É curioso que, para a população humana global, o modelo de Verhulst já é melhor do que o de Malthus, ainda que para países pobres ou em desenvolvimento o modelo de Malthus seja bem aplicado.

O professor pode estimular a pesquisa da população mundial e do país e verificar com dados oficiais disponíveis qual o modelo que melhor se ajusta ao longo dos anos. Em seguida, pode ser interessante apresentar o vídeo O Sonho, disponível no portal www.m3.mat.br, para discutir as pesquisas feitas pelos alunos e o ajuste dos dados aos modelos propostos.

De acordo com o *Country data*, a população mundial em 2009 foi de 6,79 bilhões de pessoas e crescia a uma taxa de 1,14% ao ano. Com o modelo de Verhulst podemos prever que vamos ultrapassar a marca dos 7 bilhões em 2011. Vale a pena conferir o vídeo da National Geographic e as respectivas revistas, citados na bibliografia.

Bibliografia

www.ibge.gov.br. — site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

7 Billion, National Geographic Magazine – http://youtu.be/sc4HxPxNrZ0 – National Geographic, 2011.

www.census.gov – site do U.S. Census Bureau

Iezzi, G. & Murakami, C. **Fundamentos de matemática elementar 1, conjuntos e funções**. São Paulo: Atual Editora, 1978.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Samuel Rocha de Oliveira

Revisores
Matemática
Rúbia Barcelos Amaral Zulatto
Língua Portuguesa
Ana Cecília Água de Melo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira da Costa
Vice-Reitor e Pró-Reitor de Pós-Graduação
Edgar Salvadori De Decca

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal