O software Arco Romano e Arco Ferradura é o resultado de uma mudança que precisou ser feita em dois softwares independentes, por conta disso, ele não conta com um Guia do Professor próprio.

Para auxiliar o professor, decidimos fundir os dois Guias dos softwares originais. As atividades propostas no software Arco Romano e Arco Ferradura são as atividades 1 dos softwares originais.

Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

GEOMETRIA
E MEDIDAS

Guia do professor

Software

Janelas em arco ferradura

Objetivos da unidade

1. Despertar a percepção da variação de valores da função de uma variável;
2. Modelar matematicamente uma situação por meio de uma função, determinando restrições de seu domínio;
3. Investigar o comportamento de uma função polinomial do segundo grau – seus valores máximos e mínimos.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Janelas em arco ferradura

Guia do professor

Sinopse

Este software ilustra um processo de otimização, utilizando polinômios do segundo grau. Considerada uma situação hipotética, o objetivo é encontrar, dentre as janelas com um determinado formato e de perímetro fixo, aquela que tem a maior área. O formato aqui proposto para ser investigado é o de janelas com base retangular e topo em forma de arco ferradura. A área dessas janelas pode ser estabelecida como uma função que é um polinômio do segundo grau com domínio restrito. O caminho de investigação proposto parte da percepção visual dos valores através de gráficos dinâmicos e induz ao "modelamento" do problema por funções.

Conteúdos

- Funções: Função quadrática;
- Geometria: perímetro, área de figuras planas.

Objetivos

1. Despertar a percepção da variação de valores da função de uma variável;
2. Modelar matematicamente uma situação por meio de uma função, determinando restrições de seu domínio;
3. Investigar o comportamento de uma função polinomial do segundo grau – seus valores máximos e mínimos.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

Sugerimos que o software seja utilizado em duplas.

Material relacionado

- Experimentos: Qual é o prisma de maior volume?, Polígonos e Círculos;
- Vídeo: A Lenda de Dido;
- Softwares: Otimização de Janelas, Otimização de Janelas com Topo Triangular e Janelas em Arco Romano.

Matemática Multimídia

Introdução

No dia a dia, é muito comum encontrar problemas que exigem otimização. Por exemplo, numa fábrica estamos sempre interessados em minimizar o tempo de produção e maximizar o lucro. Do ponto de vista da matemática, a otimização equivale em geral a procurar valores máximos e mínimos de uma função. Neste software, você terá a oportunidade de realizar atividades que ilustram um processo de otimização, utilizando polinômios do segundo grau. No caso de uma janela, uma maior iluminação está vinculada a uma maior área. Nos problemas aqui propostos vamos considerar uma situação hipotética na qual, a partir da medida do contorno fixo, procuramos qual é a janela que tem a maior área.

Problemas dessa natureza são denominados isoperimétricos e sempre estiveram presentes na história da matemática.

Outros três softwares, Otimização de Janelas e Otimização de Janelas com Topo Triangular e Janelas em Arco Romano, tratam de problemas semelhantes aos desenvolvidos neste.

O software

Estrutura do software

O software Janelas em Arco Ferradura é composto por uma atividade e um desafio.

TELA 1 *Mapa do software.*

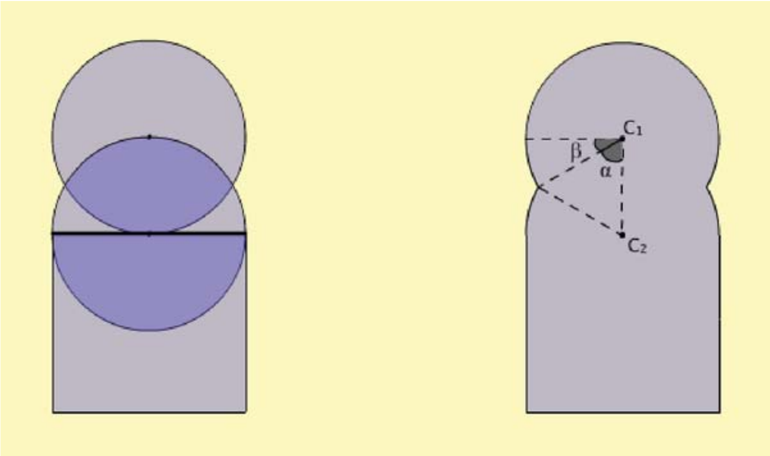
ATIVIDADE

1 Arco ferradura

O problema aqui apresentado é o de otimização para janelas com topo em arco ferradura.

Esta atividade é dividida em quatro partes, além de uma parte C final com comentários sobre as dimensões das janelas ótimas encontradas na atividade 1.

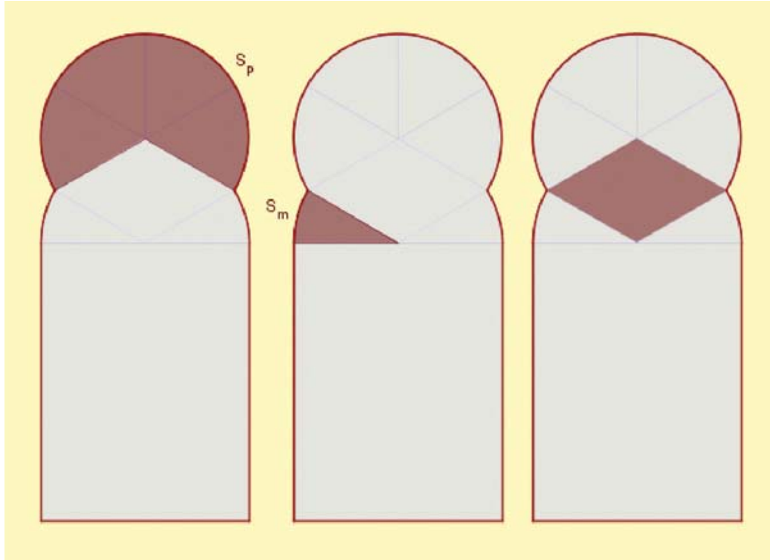
Na parte 1 é apresentada uma animação que ilustra a construção geométrica de um arco ferradura e são solicitados ângulos envolvidos nessa construção.



TELA 2

As questões da PARTE 2 dirigem o aluno, passo a passo, para a descrição do perímetro da janela em função da medida da base e da altura do retângulo. Solicita-se também, a partir do valor fixo do perímetro, 400 cm, que se determine a expressão da altura do retângulo em função da base, a qual será utilizada na PARTE 3.

As questões da PARTE 3 partem da decomposição da figura da janela em elementos geométricos mais simples (setores circulares, triângulos e retângulos) para induzir o aluno à descrição da área da janela como uma função quadrática em termos da medida da base do retângulo. Sugerimos que o professor solicite ao aluno que anote no caderno a expressão obtida para a área, com o objetivo de analisá-la em sala numa aula posterior (ver a seção FECHAMENTO deste guia).



TELA 3

Na PARTE 4 o aluno é convidado inicialmente a visualizar o gráfico da função para a área que obteve na parte 3 e observar a restrição do domínio dessa função. É solicitado então (Questões 6A e 6B) a determinar por inspeção o valor aproximado da área máxima e a medida da base que determina esse valor máximo. Sugerimos que o professor solicite ao aluno que anote no caderno a medida da base que proporciona a maior área e o valor dessa área, de modo que estes possam ser analisados em sala numa aula posterior (ver a seção FECHAMENTO deste guia). Na Questão 7A é solicitado o valor numérico aproximado da altura total da janela ótima.

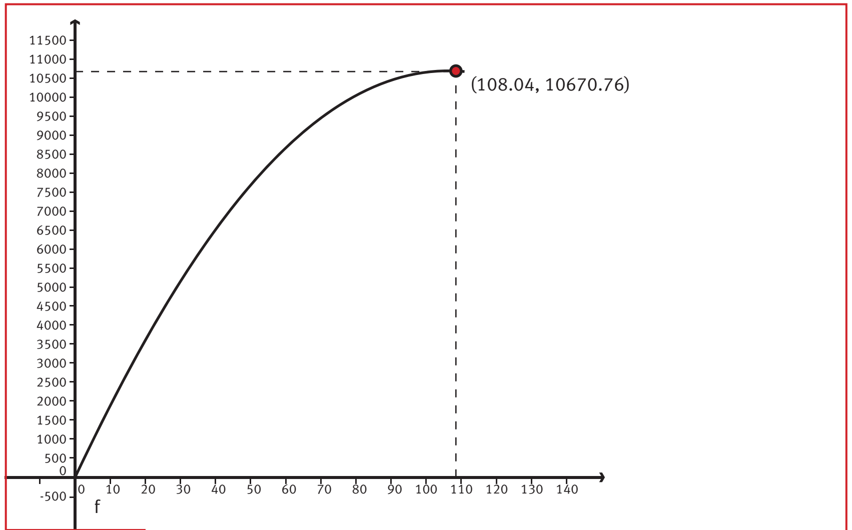
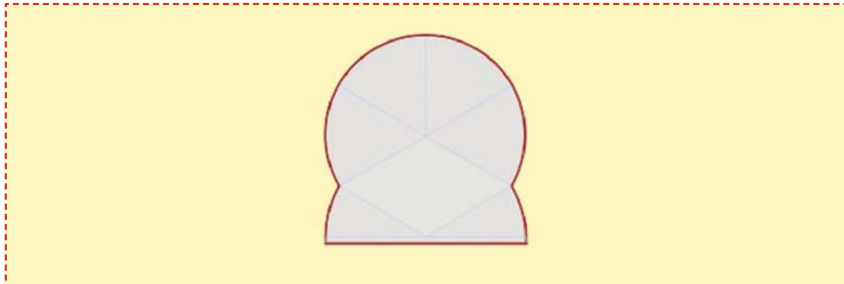


FIG. 1

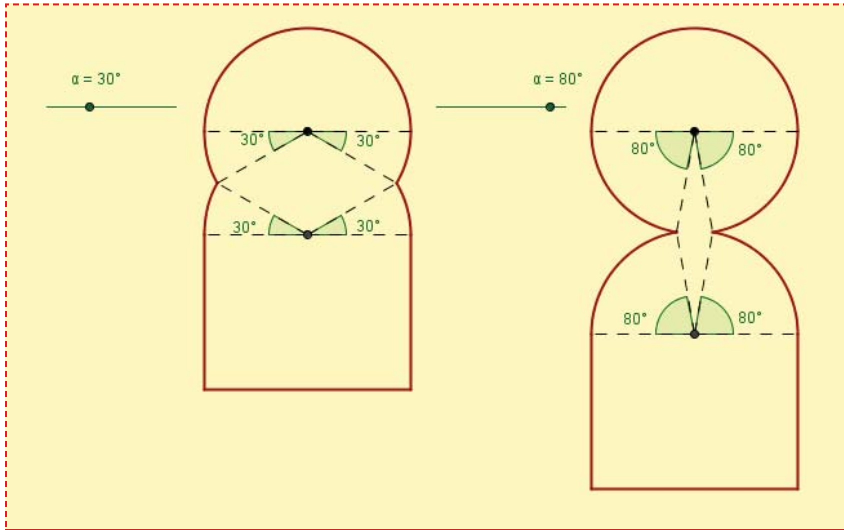
A parte C apresenta comentários sobre as proporções "estranhas" da janela ótima obtida, os quais oferecem uma motivação para a atividade do desafio, que aborda outras janelas em arco ferradura.



TELA 4 *Janela arco ferradura com perímetro igual a 400 cm e área máxima.*

Desafio

No DESAFIO o aluno é convidado a considerar outras janelas em arco ferradura, variando o ângulo de abrangência dos arcos. Nas janelas consideradas na ATIVIDADE 1 os arcos eram fixos em 30°. A partir da escolha dos ângulos (aqui está ilustrado um ângulo de 80°), o aluno deverá, seguindo passos análogos aos da ATIVIDADE 1, determinar na QUESTÃO 1 do caderno as dimensões da janela de área máxima.



TELA 5

Na QUESTÃO 2 o aluno é solicitado a escolher um ângulo complementar ao escolhido na QUESTÃO 1, repetir o procedimento e comparar os resultados.

Naturalmente, para resolver as questões do desafio será necessário, como abordagem geral, maximizar funções quadráticas, como é proposto no FECHAMENTO.

Fechamento

Recomendamos que o fechamento seja feito, por exemplo, na aula seguinte ao uso deste software.

Atividade 1
É importante relacionar o trabalho dos alunos na ATIVIDADE 1 com o conteúdo usual sobre funções quadráticas abordado até o ensino médio. Naturalmente o resultado fundamental aqui é o que estabelece o valor máximo de uma função quadrática e a associação deste ao vértice da parábola que descreve o gráfico da função.

Valor máximo de uma função quadrática

O valor máximo de uma função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais fixos, $a < 0$ e x variando nos reais, é $c - ({}^{b^2}/4a)$, o qual é assumido para x igual $-{}^{b}/2a$.

Como é conhecido, esse resultado pode ser justificado a partir da seguinte igualdade: $f(x) = ax^2 + bx + c = a\,(b + {}^{b}/2a)^2 + b \quad ({}^{b^2}/4a)$.

Como a é negativo, essa última expressão assume seu valor máximo quando $(x + {}^{b}/2a)^2$ se anula, ou seja, quando $x = -{}^{b}/2a$.

No gráfico da função acima, que é uma parábola voltada para baixo, o ponto $V = \left(-{}^{b}/2a, c \quad ({}^{b^2}/4a)\right)$ é o vértice.

Nossa sugestão para o fechamento da ATIVIDADE 1 é que cada aluno, partindo da expressão para a área obtida na PARTE 3 da atividade, encontre o valor máximo utilizando o resultado acima e o compare com o valor aproximado obtido visualmente na PARTE 4.

Se o professor preferir, poderá trabalhar em sala com a expressão exata para a área da janela em arco ferradura da ATIVIDADE 1:

$$A(x) = \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{4} \quad 5\frac{\pi}{24} \quad \frac{1}{2}\right) x^2 + 200x\,.$$

Desafio
A seguir vamos comentar as questões do desafio sugeridas para serem respondidas no caderno.

Desafio – Questão para o caderno: 1A

Escolha o valor que desejar para o ângulo que determina os arcos menores e, com base nesse valor, calcule as medidas da janela com área máxima e perímetro igual a 400 cm.

Desafio – Questão para o caderno: 2A

Faça o mesmo para a janela gerada a partir do ângulo complementar ao que você escolheu na questão anterior. Há alguma relação entre as medidas dessas duas janelas?

Para resolver estas questões serão necessárias a abordagem geral acima referida, a maximização de funções quadráticas, e a dedução da expressão para a área a partir da decomposição da figura da janela em partes mais simples.

A expressão para a área da janela em arco ferradura, quando um ângulo arbitrário α dado em graus é escolhido, pode ser obtida somando-se as áreas:

i. do semicírculo;
ii. de quatro setores circulares do ângulo α;
iii. de dois triângulos que têm por base $2\cos(90-\alpha)\frac{x}{2}$ e por altura $\operatorname{sen}(90-\alpha)\frac{x}{2}$;
iv. do retângulo de base x e altura h, onde

$$2h = 400 - \pi\left(\frac{x}{2}\right) - 4\left(\frac{\alpha}{90}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) - x$$

Agrupando os termos e usando relações trigonométricas obtemos que a área da janela para um ângulo α é dada em função da medida x da base por:

$$A_{\alpha}(x) = \left(\pi\left(\;\frac{1}{8}\quad\frac{\alpha}{360}\right) + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}\quad\frac{1}{2}\right)x^2 + 200x$$

Pelo resultado visto sobre valores máximos de funções quadráticas, podem ser encontrados então, para o ângulo α escolhido, os valores para a área máxima da janela e a medida da base que a determina.

Observe que, se na expressão $A_{\alpha}(x)$ substituirmos α por 30°, obtemos a expressão anterior $A(x)$ que descreve a área das janelas consideradas na ATIVIDADE 1.

Bibliografia

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**, Vol 1. Coleção do Professor de Matemática. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autoras
Sueli I. R. Costa e
Claudina Izepe Rodrigues

Revisores
Língua Portuguesa
Ana Cecília Agua de Melo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

foto dos arcos
Austinevan

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (imecc – unicamp)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Matemática Multimídia

NÚMEROS E FUNÇÕES

GEOMETRIA E MEDIDAS

GUIA DO PROFESSOR

Software

Janelas em arco romano

Objetivos da unidade

1. Despertar a percepção para a variação de valores de uma função de uma variável;
2. Modelar matematicamente uma situação por meio de uma função, determinando restrições de seu domínio;
3. Investigar o comportamento de uma função polinomial do segundo grau – seus valores máximos e mínimos.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+. Recomendamos a utlização em computadores com placa de vídeo com suporte a OpenGL para melhor visualização dos objetos tridimensionais.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Janelas em arco romano

Matemática Multimídia

Guia do professor

Sinopse

Este software ilustra um processo de otimização, utilizando polinômios do segundo grau. É considerada uma situação hipotética em que o objetivo é encontrar a janela de maior área (Atividade 1) e de maior luminosidade (Atividade 2), considerados um determinado formato e perímetro fixo. O formato aqui proposto para ser investigado é o da janela com base retangular e topo em forma de arco romano. A área da janela, assim como a luminosidade, pode ser estabelecida como uma função que é um polinômio do segundo grau com domínio restrito.

O caminho de investigação proposto parte da percepção visual dos valores através de gráficos dinâmicos e induz ao “modelamento” do problema por funções.

Conteúdos

- Funções: Função quadrática;
- Geometria: perímetro, área de figuras planas.

Objetivos

1. Despertar a percepção para a variação de valores de uma função de uma variável;
2. Modelar matematicamente uma situação por meio de uma função, determinando restrições de seu domínio;
3. Investigar o comportamento de uma função polinomial do segundo grau – seus valores máximos e mínimos.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

Sugerimos que o software seja utilizado em duplas.

Materiais relacionados

- Experimentos: Qual é o prisma de maior volume?, Polígonos e circunferências.
- Vídeos: A Lenda de Dido, O problema da cerca.
- Áudio: O que é parábola?
- Softwares: Otimização de Janelas, Janelas com Topo Triangular, Janelas em Arco Ferradura.

Introdução

No dia a dia, é muito comum encontrar problemas que exigem otimização. Por exemplo, numa fábrica estamos sempre interessados em minimizar o tempo de produção e maximizar o lucro. Do ponto de vista da matemática isto equivale em geral a procurar valores máximos e mínimos de uma função. Este software contém atividades que ilustram um processo de otimização, utilizando polinômios do segundo grau. No caso de uma janela, uma maior iluminação está vinculada a uma maior área. Nos problemas aqui propostos vamos considerar uma situação hipotética na qual, a partir de um perímetro (contorno) fixo, procuramos qual é a janela que tem a maior área e, dentre as janelas com arco romano e vitrais coloridos, sempre com o mesmo perímetro fixo, qual proporciona a maior luminosidade.

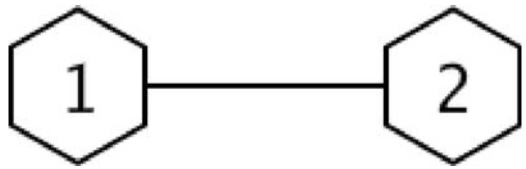
Problemas desta natureza são denominados isoperimétricos e sempre estiveram presentes na história da matemática.

Outros três programas – Otimização de Janelas, Janelas com Topo Triangular e Janelas em Arco Ferradura – tratam de problemas semelhantes ao desenvolvido neste software. Além destes, no item Materiais Relacionados outros programas, experimentos e vídeos que abordam problemas isoperimétricos são sugeridos.

O software

Estrutura do software

O software Janelas em Arco Romano é composto por duas atividades.



TELA 1 *Mapa do software.*

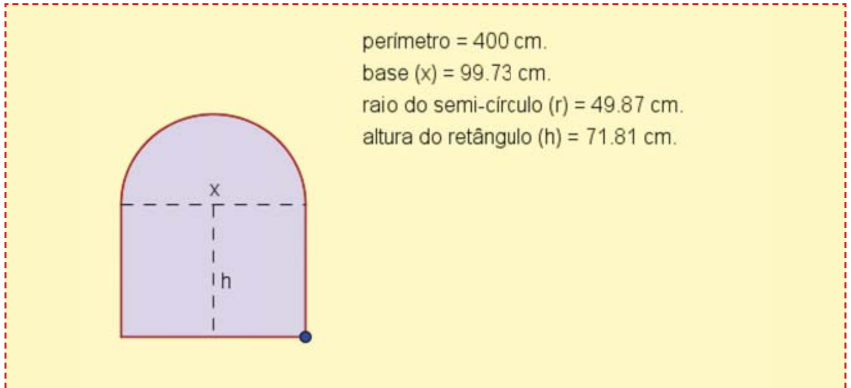
ATIVIDADE

1 Janelas em arco romano

O problema aqui apresentado é o de otimização para janelas com topo em arco romano. O objetivo é, dado um perímetro fixo, investigar que medidas proporcionam a maior área para a janela.

Esta atividade é dividida em cinco partes, além de uma parte final com comentários sobre as dimensões da janela ótima encontrada.

Na parte 1 é apresentada uma ilustração de uma janela com topo em arco romano.



TELA 2

O aluno pode variar as dimensões da janela e observar o que acontece com a altura h do retângulo e a área da janela à medida que a base x varia.

A PARTE 2 tem como objetivo investigar qual o maior e o menor valor possível para a base da janela, considerando-se a restrição do perímetro fixo, que corresponde a 400 cm. O intervalo entre estes dois valores determina o domínio da função área a ser analisada.

Na PARTE 3, o aluno varia a medida da base da janela e escolhe algumas medidas para observar qual delas proporciona a janela de maior área e a de menor área.

As questões da PARTE 4 dirigem o aluno, passo a passo, para a descrição do perímetro da janela em função da medida da base e da altura do retângulo. Solicita-se também, a partir do valor fixo do perímetro, 400 cm, que se determine a expressão da altura do retângulo em função da base, a qual será utilizada para encontrar a expressão da área da janela. A seguir, partindo da decomposição da figura da janela em elementos geométricos mais simples (semicircunferência e retângulo), o aluno é direcionado a descrever a área da janela como uma função quadrática em termos da medida da base do retângulo. Sugerimos que o professor solicite ao aluno que anote no caderno a expressão obtida para a área, a ser analisada em sala na aula seguinte (ver a seção "FECHAMENTO" deste guia).

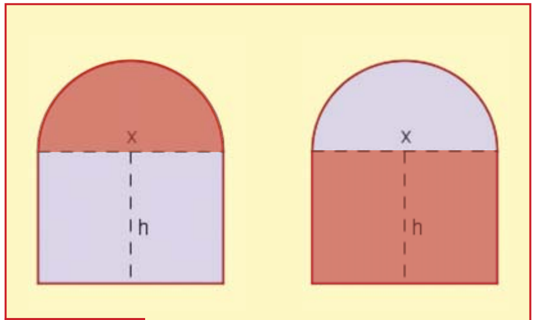


FIG. 1

Na PARTE 5 o aluno é convidado inicialmente a visualizar o gráfico da função para a área que obteve na parte 4 e observar a restrição do domínio desta função. É solicitado então (Questões 7A, 8A e 9B) a determinar por inspeção o valor numérico aproximado da área máxima e os valores numéricos da base e da altura total da janela que determinam esta área. O objetivo é observar que, para a área máxima, os valores para a base e a altura total da janela ótima são iguais, como está exposto na Parte 5 desta atividade.

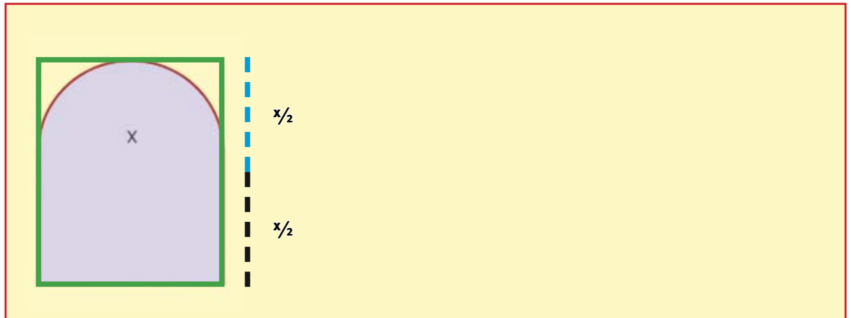


FIG. 2 *Altura da semicircunferência e altura do retângulo são iguais.*

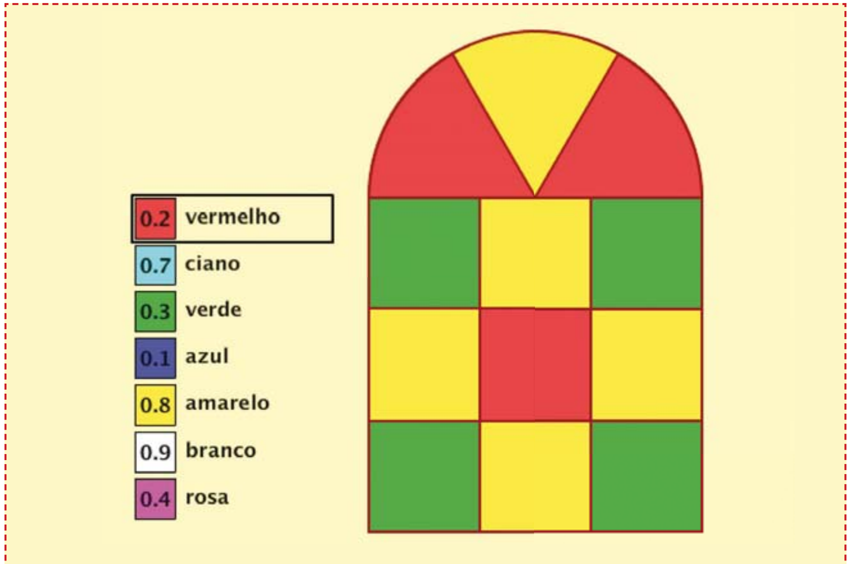
Sugerimos que o professor solicite ao aluno que anote no caderno a medida da base que proporciona a maior área e o valor desta, já que esses dados deverão ser analisados em sala na aula seguinte (ver a seção FECHAMENTO deste GUIA).

ATIVIDADE

2 Janelas em arco romano com vitrais

O problema aqui apresentado é o de otimização da luminosidade para janelas com topo em arco romano e vitrais coloridos.

Esta atividade é dividida em quatro partes. Na primeira parte o aluno poderá escolher, entre algumas possibilidades, como montar o vitral em uma janela com topo em arco romano, a qual será utilizada em toda a ATIVIDADE 2. A figura a seguir mostra uma das possibilidades para a montagem do vitral.



TELA 3

O objetivo da ATIVIDADE 2 é, a partir da escolha feita pelo aluno, encontrar as dimensões da janela para que a luminosidade seja máxima.

Na PARTE 2, conhecendo o fator de transparência de cada cor do vitral escolhido, o aluno será dirigido, passo a passo, a encontrar a expressão para a luminosidade do semicírculo que forma o topo da janela em arco romano em função da medida da base.

As questões da PARTE 3 têm como objetivo orientar o aluno a encontrar a expressão para a luminosidade da parte retangular da janela em função da medida da base.

Na PARTE 4 o aluno é convidado inicialmente a visualizar o gráfico da função soma das luminosidades no semicírculo e na região retangular, ou seja, a função resultante da soma das expressões obtidas nas PARTES 2 e 3, a qual fornece a luminosidade total da janela de acordo com a medida da base. O aluno pode também observar no gráfico a restrição do domínio desta função. Em seguida, é solicitado (Questões 4A, 4B, 5A e 5B) a determinar por inspeção o valor numérico aproximado da luminosidade máxima que pode ser obtida e os correspondentes valores numéricos da base, da área do semicírculo e da área da região retangular.

Este é o gráfico da função luminosidade em função da base para o exemplo de vitral da figura anterior:

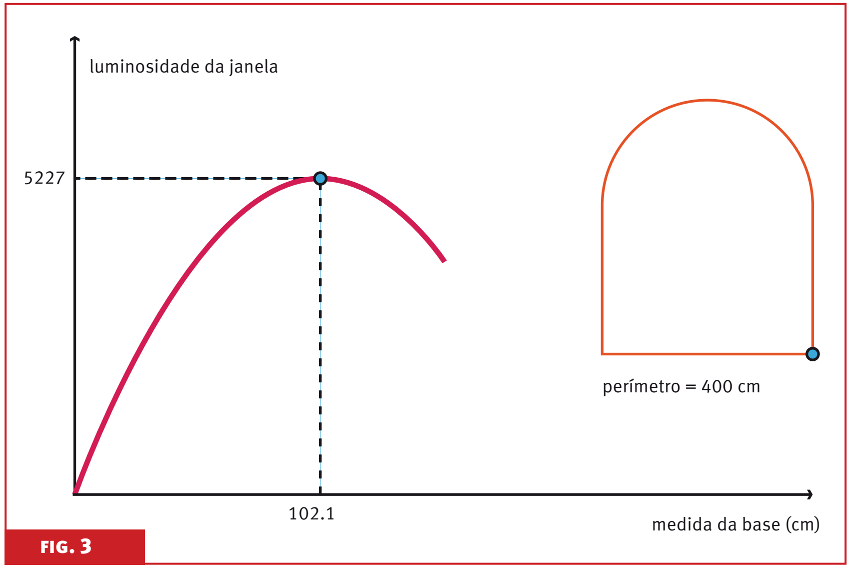


FIG. 3

As três questões finais para serem respondidas no caderno têm como objetivo analisar como a escolha de cores feita pelo aluno afeta o fator de transparência e o formato da janela de maior luminosidade encontrada. Estas questões são comentadas no final da seção "FECHAMENTO" a seguir.

Fechamento

Recomendamos que o fechamento com os alunos seja feito de preferência na aula seguinte ao uso deste software.

Atividade 1
É importante relacionar o trabalho dos alunos na ATIVIDADE 1 com o conteúdo usual sobre funções quadráticas abordado até o ensino médio. Naturalmente o resultado fundamental aqui é o que estabelece o valor máximo de uma função quadrática e a associação deste ao vértice da parábola que descreve o gráfico da função.

Valor máximo de uma função quadrática (VMQ)

O valor máximo de uma função quadrática, $f(x)=ax^2+bx+c$, com a, b e c números reais fixos, $a<0$ e x variando nos reais, é

$$c-\left(\frac{b^2}{4a}\right),$$

o qual é assumido para x igual a

$$-\frac{b}{2a}.$$

Como é conhecido, este resultado pode ser justificado a partir da seguinte igualdade:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\left(\frac{b^2}{4a}\right).$$

Como a é negativo, esta última expressão assume seu valor máximo quando $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ se anula, ou seja, quando $x=-\frac{b}{2a}$.

No gráfico da função anterior, que é uma parábola voltada para baixo, o ponto

$$V=\left(-\frac{b}{2a},c-\left(\frac{b^2}{4a}\right)\right)$$

é o vértice.

Nossa sugestão para o fechamento da ATIVIDADE 1 é que cada aluno parta da expressão para a área obtida na PARTE 4, encontre o valor máximo utilizando o resultado acima e o compare com o valor aproximado que obteve visualmente na PARTE 5.

Se o professor preferir, poderá trabalhar em sala com a expressão exata para a função área da janela em arco romano da ATIVIDADE 1.

Função Área
Sendo p o perímetro fixo da janela, $p=\frac{\pi x}{2}+2h+x$, onde x é a medida da base da janela e h é a altura da parte retangular. Assim, obtemos a expressão da função área da janela:

$$A_t(x)=xh+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=-\frac{\pi+4}{8}x^2+\frac{p}{2}x$$

O gráfico de $A_t(x)$ é uma parábola voltada para baixo, com raízes nos pontos $x_1=0$ e $x_2=\frac{4p}{\pi+4}$. Assim, a área máxima é $A_t(x_v)$ e ocorre quando a medida da base é x_v, onde $x_v=\frac{2p}{\pi+4}$ é o ponto que corresponde ao vértice da parábola. Neste caso, a altura da parte retangular é $h=\frac{p}{\pi+4}$. Como a altura total, H, da janela é $H=h+\frac{x}{2}$, a altura da janela ótima é $H=\frac{2p}{\pi+4}$. Logo, $H=x_v$, ou seja, a medida da base da janela ótima é igual à altura total da janela.

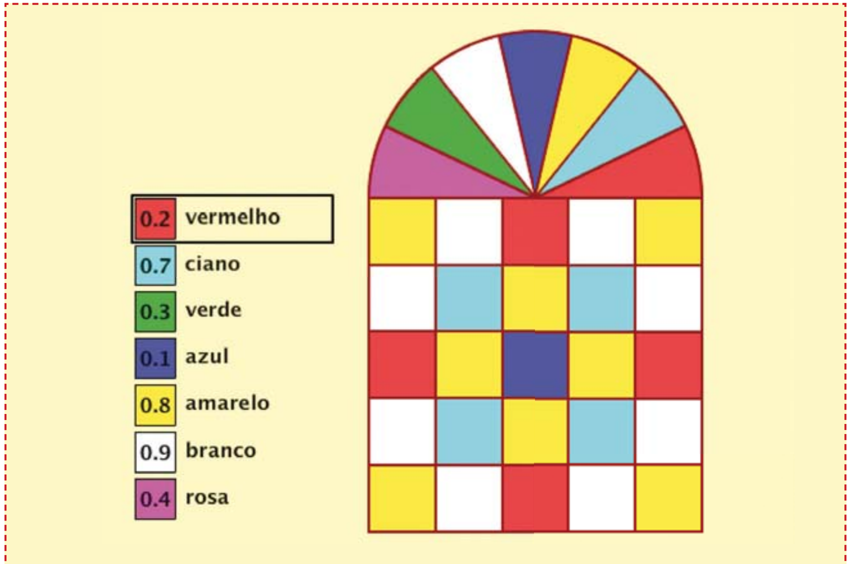
Atividade 2
No FECHAMENTO da ATIVIDADE 2 sugerimos que cada aluno parta da expressão para a luminosidade do semicírculo e da expressão para a luminosidade da região retangular, obtidas na parte 2 e na parte 3, respectivamente, e deduza a expressão para a função luminosidade total da janela e seu domínio. A seguir deverá ser determinado, de forma exata, o valor máximo desta função, utilizando-se o resultado VMQ sobre uma função quadrática citado neste FECHAMENTO e observando-se as restrições do domínio.

Deve ser feita então a comparação com o valor aproximado, obtido visualmente na PARTE 4.

O professor também poderá trabalhar em sala com a expressão exata mais geral (abordando todas as possibilidades de montagem do vitral) para a luminosidade total da janela em arco romano com vitral, como é apresentado no desenvolvimento a seguir.

Função Luminosidade

Consideramos uma janela com arco romano de perímetro fixo p, sendo a região retangular subdividida em n regiões retangulares e a região semicircular dividida em n fatias. Sejam $p_1, p_2, \dots, p_n$ os fatores de luminosidade das cores escolhidas para cada uma das n subdivisões da região retangular e $q_1, q_2, \dots, q_m$ os fatores de luminosidade das cores escolhidas para cada uma das m fatias da região semicircular. Vamos encontrar a expressão da função luminosidade.



TELA 4 *Janela em arco romano com 7 fatias na região circular, m=7, e a região retangular dividida em 25 regiões, n=25.*

Sendo x a medida da base da janela, h a altura da parte retangular e p o perímetro da janela, temos:

$$p = x + 2h + \frac{\pi x}{2}.$$

Assim, $h = \frac{1}{2}\left(p - x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Como $h \geqslant 0$, temos restrição para a variação possível da medida da base da janela, pois, do fato de que $p - x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \geqslant 0$, temos $0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{1+\frac{\pi}{2}}$. (***)

Sejam $A_r = xh = x\frac{1}{2}\left(p - x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ a área da região retangular e $A_c = \pi\frac{x^2}{8}$ a área da região semicircular. As luminosidades de cada uma destas partes, $L_x(x)$ e $L_c(x)$, são dadas por:

$$L_r(x) = (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)\frac{A_r}{n} = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} A_r$$

e

$$L_c(x) = (q_1 + q_2 + \ldots + q_m)\frac{A_c}{m} = \frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_m}{m} A_c.$$

Sejam $a = \frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}$ e $b = \frac{q_1+q_2+\ldots+q_m}{m}$ os fatores de luminosidade média da parte retangular e da parte semicircular, respectivamente. Como a luminosidade total, $L(x)$, da janela é a soma das luminosidades da parte retangular e da parte semicircular, $L_r(x)$ e $L_c(x)$, temos:

$$L(x) = L_r(x) + L_c(x) = aA_r + bA_c.$$

Assim,

$$L(x) = \frac{a}{2}\left(-x^2\left(1 + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{b}{2a}\right)\right) + px\right)$$

é a função que descreve a luminosidade e seu domínio é o intervalo descrito acima.

As raízes de $L(x)$ ocorrem nos pontos

$$x_1 = 0 \text{ e } x_2 = \frac{p}{1 + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{b}{2a}\right)}.$$

O vértice da parábola-gráfico, que corresponde ao ponto médio destas raízes, é o ponto $(x_v, L(x_v))$, onde

$$x_v = \frac{p}{2\left(1+\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{b}{2a}\right)\right)} \text{ e } L(x_v) = -\frac{3ap^2}{8\left(1+\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{b}{2a}\right)\right)}.$$

Tomando $B = 1 + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{b}{2a}\right)$, a função luminosidade pode ser expressa por $L(x) = \frac{a}{2}\left(-Bx^2 + px\right)$. Temos então três possibilidades:

I. Se $B > 0$, o coeficiente do termo quadrático da função é negativo e portanto o gráfico de $L(x)$ é uma parábola voltada para baixo. As raízes da função $L(x)$ ocorrem nos pontos $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{p}{B} > 0$. Neste caso, temos primeiro que analisar se o intervalo do domínio da função $L(x)$, (***), contém o valor correspondente ao vértice, isto é, se x_v é menor do que ou igual a
$$x = \frac{p}{1+\frac{\pi}{2}}.$$
Se for, a luminosidade máxima, $L(x_v)$, corresponde ao vértice da parábola e ocorre quando a medida da base é x_v. Se x_v for maior que
$$x = \frac{p}{1+\frac{\pi}{2}},$$
a janela com maior luminosidade ocorre no extremo do intervalo do domínio,
$$x = \frac{p}{1+\frac{\pi}{2}},$$
(Note que neste último caso o trecho de parábola que é o gráfico da função $L(x_v)$, não contém o vértice.)

II. Se $B < 0$, o gráfico de $L(x)$ é uma parábola voltada para cima, com raízes nos pontos $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{p}{B} < 0$. Lembrando que
$$0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{1+\frac{\pi}{2}},$$
a luminosidade máxima ocorre quando
$$x = \frac{p}{1+\frac{\pi}{2}}.$$

III. Se $B = 0$, $L(x) = \frac{ap}{2}x$, e neste caso a função luminosidade é linear e seu máximo também ocorre no extremo, $x = \dfrac{p}{1+\frac{\pi}{2}}$, do intervalo do domínio.

Para responder às questões 5A e 5B da parte 4 o aluno deverá partir das expressões para a área do semicírculo e do retângulo em termos da base, x, substituir o valor de x observado para a janela de maior luminosidade e usar a calculadora para encontrar os valores numéricos.

Questões para o caderno

Como já foi dito, as questões para serem respondidas no caderno procuram analisar como a escolha de cores feita pelo aluno afeta o fator de transparência e o formato da janela de maior luminosidade encontrada.

Questão para o caderno 1A

O fator de transparência médio da janela com luminosidade máxima que você encontrou pode ser calculado pela divisão desta luminosidade máxima pela área total da janela. Qual é este valor?

Questão para o caderno 1B

Na janela com vitral ótima que você encontrou, qual o percentual da altura da parte retangular em relação à altura total da janela?

Questão para o caderno 1C

Na Atividade 1 (sem cores), você observou que a janela ótima (de maior área) é obtida quando as medidas da base e da altura total da janela são iguais. Compare este fato com o resultado obtido na questão anterior (1B). O que você observa? Faça a comparação também com os resultados de outros grupos, para discutir como a escolha de cores pode afetar o formato da janela de maior luminosidade.

Os resultados obtidos nas questões 1A e 1B visam a uma análise comparativa (Questão 1C) das diferentes janelas de luminosidade máxima encontradas pelos grupos e em particular a uma comparação destas com a janela sem cor (fator de transparência igual a 1), cujos dados são:

	Janela sem cor	Luminosidade máxima = área	Base	Área do semi-círculo	Altura da base retangular	Área do retângulo	Área total	Fator de transparência médio – Questão 1A (*)	Questão 1B (**) (%)
		11204,30	112,50	4967,58	55,44	6236,72	11224,20	1	50

TABELA 1

Ilustramos a seguir dados correspondentes a janelas ótimas para diferentes possibilidades de montagem do vitral.

O importante aqui é discutir e estimular a percepção de como a escolha das cores afeta o formato da janela de maior luminosidade. Naturalmente, além da janela sem cor, os casos extremos (1 e 9 na tabela) são particularmente interessantes para a análise comparativa.

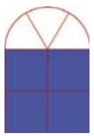
		Luminosidade máxima	Base	Área do semi-círculo	Altura da base retangular	Área do retângulo	Área total	Fator de transparência médio – Questão 1A (*)	Questão 1B (**) (%)
1		8552,9	155,6	9507,80	0	0	9507,80	0,90	0,00
2		6346,40	126,40	6270,96	37,58	4749,61	11020,56	0,58	37,29
3		1767,00	117,70	5437,42	48,76	5738,52	11175,94	0,16	45,31

TABELA 2

(Continua na próxima página)

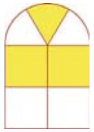
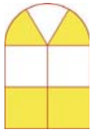
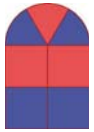
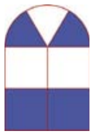
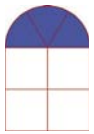
		Luminosidade máxima	Base	Área do semi-círculo	Altura da base retangular	Área do retângulo	Área total	Fator de transparência médio – Questão 1A (*)	Questão 1B (**) (%)
4		9606,60	113,40	5047,38	54,28	6155,47	11202,84	0,86	48,91
5		9442,20	111,60	4888,42	56,59	6315,89	11204,31	0,84	50,35
6		1602,30	107,30	4518,97	62,12	6665,42	11184,39	0,14	53,66
7		5227,00	102,10	4091,58	68,80	7024,63	11116,21	0,47	57,41
8		5012,60	102,10	4091,58	68,80	7024,63	11116,21	0,45	57,41
9		7249,9	80,4	2537,18	96,69	7773,55	10310,74	0,70	70,63

TABELA 2 *(Continuada da página anterior)*

(*) Questão 1A: Percentual da área da janela com vitral ótima em relação à área máxima da janela sem cores.

(**) Questão 1B: Na janela com vitral ótima que você encontrou, qual o percentual da altura da parte retangular em relação à altura total da janela?

Bibliografia

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**, Vol 1, Coleção do Professor de Matemática, (6ª Edição). Rio de Janeiro: SBM, 2006

Ficha técnica

Matemática Multimídia

AUTORAS
Sueli I. R. Costa e
Claudina Izepe Rodrigues

REVISORES
Língua Portuguesa
Ana Cecília Agua de Melo

PROJETO GRÁFICO E ILUSTRAÇÕES TÉCNICAS
Preface Design

FOTOGRAFIA DO ARCO
Wolfgang Staudt

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal