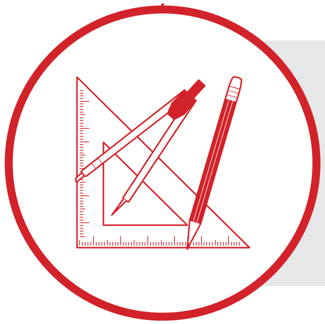
Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

O EXPERIMENTO



Experimento

Baralho mágico

Objetivos da unidade

- Examinar uma função logarítmica discreta a partir da execução de uma mágica com cartas;
- Motivar o estudo dos logaritmos.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Baralho mágico

O experimento

Sinopse

Este experimento explora um truque que consiste em adivinhar uma carta de baralho escolhida por uma pessoa. O objetivo final é mostrar que o algoritmo usado na execução da mágica está relacionado com uma função logarítmica.

Conteúdos

Função logarítmica.

Objetivos da unidade

1. Examinar uma função logarítmica discreta a partir da execução de uma mágica com cartas;
2. Motivar o estudo dos logaritmos.

Duração

Uma aula dupla.

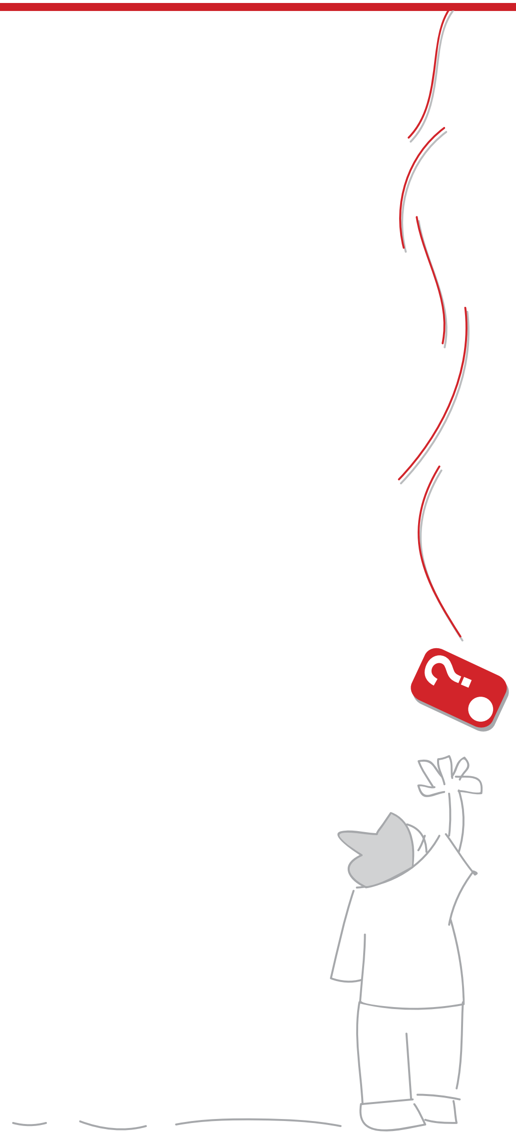
Matemática Multimídia

Introdução

Muitas vezes ouvimos dizer que a Matemática está em todos os lugares. O que seria espantoso é saber que ela é usada como base até mesmo em diversos truques mágicos, aqueles que são feitos por pessoas que achamos ter poderes sobrenaturais. Este experimento vai mostrar que alguns desses poderes podem ser um conhecimento matemático específico, no caso sobre funções logarítmicas e podemos tirar muitas outras coisas dessa cartola, vamos a elas!

A atividade consiste em fazer um aluno, aleatoriamente, escolher uma carta de baralho que será embaralhada seguindo uma sequência de passos. O ponto principal é analisar os resultados desse procedimento. Assim, além de introduzir o conceito de função logarítmica, o experimento é motivacional e lúdico, transfigurando de certa forma o (pré)conceito que os alunos fazem deste conteúdo matemático.

A partir desta atividade, o professor pode partir para o estudo mais profundo de logaritmo e das funções que o contém, retomando inclusive propriedades e aplicações do tema.



O Experimento

Material necessário

- 1 baralho sem cartas repetidas.

Material alternativo

- Cartões numerados feitos de cartolina.

FIG. 1

Preparação

Verifique se todos os grupos possuem um baralho ou algum tipo de carta confeccionada, por exemplo, com cartolina. É importante que cada grupo possua no mínimo 40 cartas não repetidas.

Divida a turma em grupos com 3 ou 4 alunos e peça-lhes que elejam um líder. A Folha do Aluno está dividida em duas partes, uma delas, a que ensina o procedimento da mágica, deve ser entregue somente ao líder de cada grupo. Peça para eles estudarem a mágica antes de mostrá-la ao grupo.

Regras do jogo

1. Separe 15 cartas quaisquer do baralho;
2. Distribua-as sobre a mesa em três colunas de 5 cartas cada, conforme a figura2;

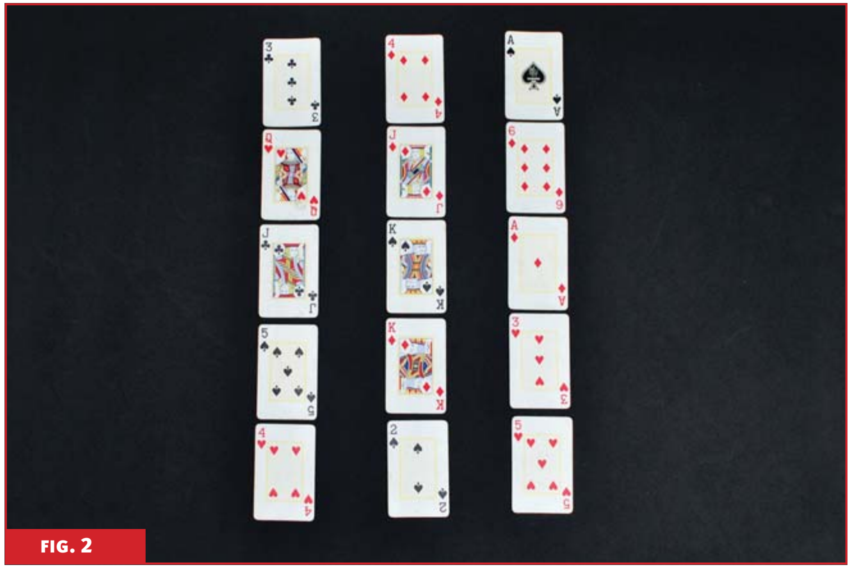


FIG. 2

3. Peça para que um colega do grupo escolha umas das cartas sem dizer qual é;
4. Peça ao colega que aponte a coluna na qual se encontra a carta que ele escolheu, conforme a FIGURA 3;

FIG. 3

! *A carta escolhida não é o Ás de Ouros. O aluno está apenas indicando em qual coluna se encontra a carta escolhida.*

5. Junte as cartas de cada uma das 3 colunas formando 3 montes. Coloque sempre o monte referente à coluna escolhida entre os outros dois, juntando os três montes. Faça isso da forma mais discreta possível;
6. Distribua novamente as cartas sobre a mesa em três colunas conforme mostra a FIGURA 4 (siga da esquerda para a direita e, quando completar uma linha com 3 cartas, de cima para baixo);

FIG. 4

7. Repita os passos 4, 5 e 6 mais duas vezes;
8. A carta escolhida pela vítima é a carta do meio da coluna do meio (no nosso caso, a carta escolhida foi o Três de copas)!

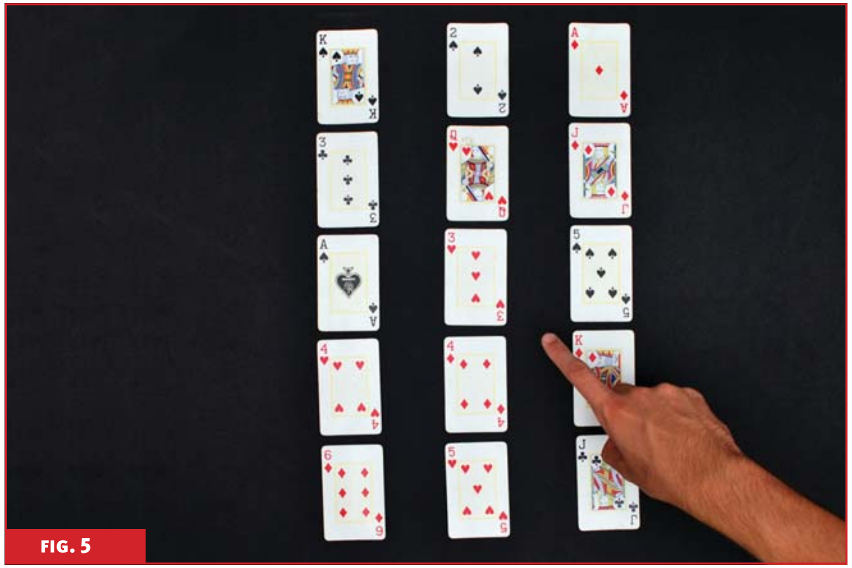


FIG. 5

A matemágica das cartas

ETAPA
1

Para começar, o líder de cada grupo deve realizar a mágica para os colegas, desafiando-os a descobrir como ela foi feita. Eles devem repeti-la até que o grupo descubra qual o algoritmo de execução.

Depois de descobrir o mecanismo da mágica, eles devem realizá-la com diferentes números de cartas, *sempre usando um número ímpar de cartas distribuídas em 3 colunas*, conforme a TABELA 1 que também está na FOLHA DO ALUNO:

Para cada quantidade de cartas escolhida, é necessário repetir os passos 4, 5 e 6 da mágica um número diferente de vezes. É com essa informação que os alunos devem preencher a tabela a seguir.

Número de cartas	**1**	**3**	**9**	**15**	**21**	**27**	**33**	**39**	**...**	**75**	**81**	**...**	**237**	**243**
Número de repetições necessárias									...			...		

TABELA 1 *Os alunos deverão preenchê-la*

Se o número de cartas fosse par, também seria possível realizar a mágica, porém a carta que buscamos não estaria no mesmo lugar que definimos neste experimento. No GUIA DO PROFESSOR, há uma demonstração de que, para a carta convergir para o local indicado, temos que ter um número ímpar delas.

* *Professor, a mágica deverá ser executada com até 39 cartas. Os outros campos deverão ser preenchidas a partir das hipóteses formuladas pelos alunos.*

Resultado esperado
Ao preencher a tabela, esperamos que os alunos percebam que, assim que o número de cartas ultrapassa uma potência de 3, aumenta a quantidade de vezes que o mágico precisa perguntar *em qual coluna está a carta?*.

Fechamento

Após a realização da atividade, tome a palavra e siga os passos indicados a seguir para deduzir com seus alunos a expressão que nos fornece o número de perguntas *em qual coluna está a carta?* em função do *número de cartas utilizadas* para a realização da mágica.

Dedução

Vamos analisar o caso com 21 cartas.

Antes de realizar a primeira pergunta *em qual coluna está a carta?*, sabemos apenas que a carta escolhida é uma das 21 expostas sobre a mesa. Porém, ao pedir a indicação da coluna (as marcações indicam a coluna escolhida) em que ela se encontra, teremos reduzido a nossa incerteza a $^1/_3$ da inicial, como indica a FIGURA 6:

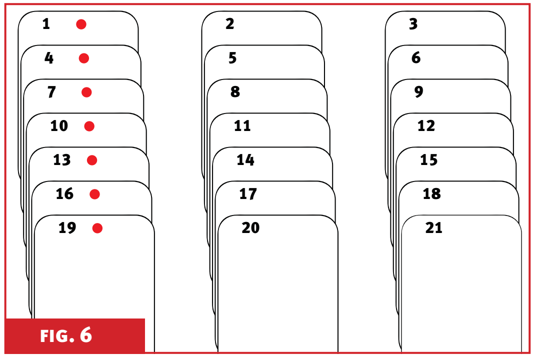


FIG. 6

Nossas possibilidades foram reduzidas a $^1/_3 \cdot 21 = 7$ cartas.

Redistribuindo as cartas e repetindo a pergunta, teremos reduzido então as nossas opções a $^1/_3$ da quantidade anterior de cartas, conforme a FIGURA 7:

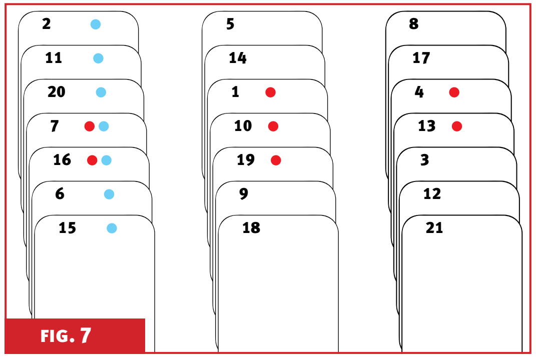


FIG. 7

Aqui as nossas possibilidades foram reduzidas a $^1/_3 \cdot {}^1/_3 \cdot 21 = 2,33\ldots$, e, como o número de cartas é inteiro, podemos perceber que esse número foi reduzido a 2 cartas.

Repetindo esse procedimento novamente, temos as nossas possibilidades reduzidas a $^1/_3$ das anteriores (a única com as três marcações):

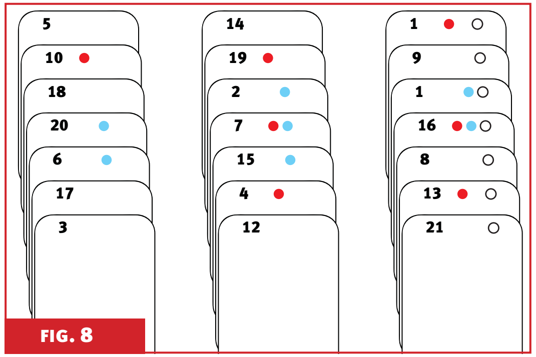


FIG. 8

Agora temos $1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/3 \cdot 21 = 0,77\ldots$, ou seja, um número menor que 1! Portanto, basta reorganizar as cartas novamente que saberemos que a carta escolhida será a carta do meio da coluna do meio:

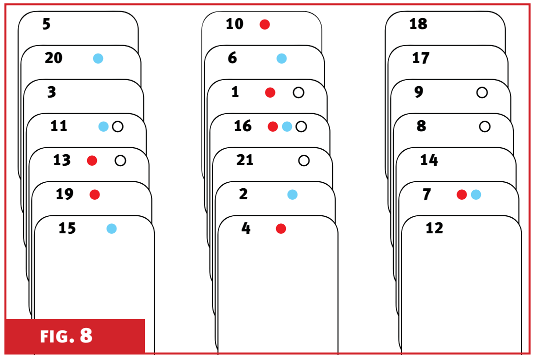


FIG. 8

De maneira geral, dado um número n de cartas, queremos saber qual o número k de perguntas que devem ser feitas para ter certeza de onde se encontra a carta escolhida. Assim, temos:

- Primeira pergunta: $1/3 \cdot n$
- Segunda pergunta: $1/3 \cdot 1/3 \cdot n$
- Terceira pergunta: $1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/3 \cdot n$

.
.
.

- K-ésima pergunta: $(1/3)^k \cdot n$

Queremos que as nossas dúvidas sejam menores que 1, ou seja:

$$(1/3)^k \cdot n \leq 1$$

ou ainda,

$$(1/3)^k \leq 1/n$$

Agora vamos isolar k, já que o nosso objetivo é ter um valor de k em função do número de cartas. Perceba que $(1/3)^k = 1/n$ é uma exponencial e, para isolar o k, deveremos aplicar $\log_3$ (a função inversa) nos dois lados da expressão:

$$\log_3 (1/3)^k \leq \log_3 (1/3) \rightarrow$$

$$k \cdot \log_3 (1/3) \leq \log_3 (1) - \log_3 n \rightarrow$$

$$-k \leq 0 - \log_3 n \rightarrow$$

$$\boxed{k \geq \log_3 n}$$

Ou seja, para ter certeza da carta que a pessoa escolheu, devemos fazer um número de perguntas maior ou igual a $\log_3 n$, onde n é o número de cartas utilizadas na realização da mágica. Como queremos fazer o menor número possível de perguntas, temos que k deve ser o menor inteiro maior que $\log_3 n$.

Agora podemos preencher a tabela da Folha do Aluno:

Número de cartas	1	3	9	15	21	27	33	39	...	75	81	...	237	243
Número de repetições necessárias	0	1	2	3	3	4	4	4	...	4	5	...	5	6

TABELA 2

Faça essa dedução na lousa com os seus alunos, preencha a tabela e peça para que eles vejam se os resultados de cada grupo estão corretos.

E para *m* colunas?

Vimos qual o número necessário de perguntas para quando utilizarmos n cartas em 3 colunas em nossa mágica, mas e para um número m ímpar qualquer de colunas?

Basta substituir 3 por m na expressão obtida anteriormente:

$$k \geq \log_m n$$

No gráfico a seguir está representada a função $\log_m n$ para 3, 5 e 13 colunas:

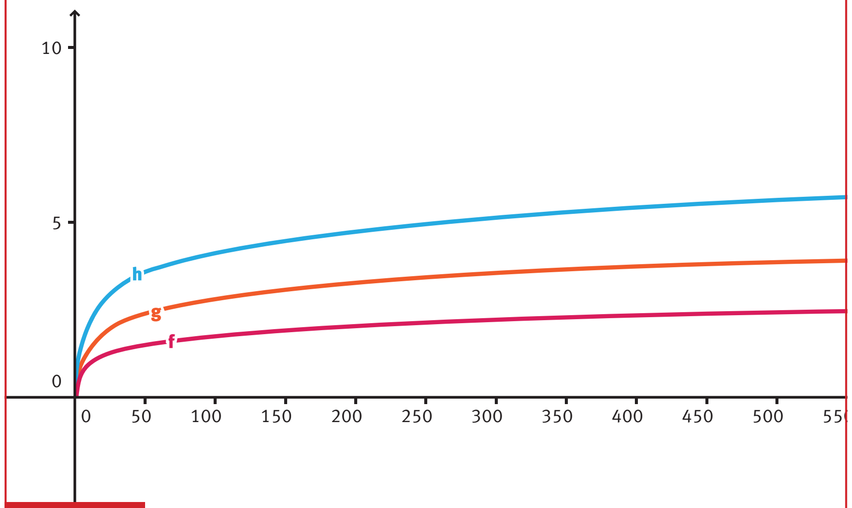


FIG. 9

Apresente um esboço desse gráfico aos seus alunos para que eles vejam o quão devagar cresce a função logarítmica, o que torna a mágica ainda mais interessante, uma vez que precisa de um número pequeno de perguntas para uma grande quantidade de cartas.

! *Com 10 perguntas, se fizermos a mágica com 3, 5 e 13 colunas, poderemos utilizar até 50.000, 9.700.000 e 130.000.000.000 cartas, respectivamente.*

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Marcelo Firer

Coordenação de redação
Fabricio de Paula Silva

Redação
Kauan Pastini Paula Leite

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara de Oliveira

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL