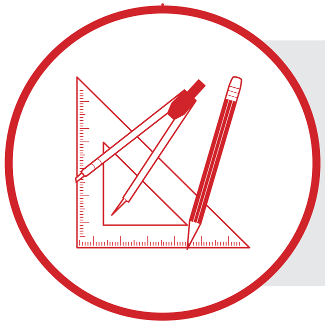
Matemática Multimídia

ANÁLISE DE DADOS
E PROBABILIDADE

GUIA DO PROFESSOR



Experimento

Um desafio à intuição – baralho e torradas

Objetivo da unidade
Adotar a melhor estratégia em um jogo, de acordo com o resultado de um experimento aleatório.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Um desafio à intuição – baralho e torradas

Matemática Multimídia

Guia do professor

Sinopse
Este experimento apresenta dois jogos envolvendo o conceito de probabilidade condicional: como atribuir probabilidades em face de uma nova informação. Os alunos serão convidados a tomar posições e decisões neste contexto.

Conteúdo
Probabilidade, Probabilidade Condicional.

Objetivo
Adotar a melhor estratégia em um jogo, de acordo com o resultado de um experimento aleatório.

Duração
Uma aula dupla.

Introdução

A Probabilidade lida com o conceito de incerteza e é utilizada para modelar experimentos ou observações cujo resultado não conhecemos com precisão. Sua formalização requer a definição de alguns conceitos básicos.

Um *experimento* (ou observação) *aleatório* é qualquer experimento cujo resultado não é conhecido exatamente. Por exemplo, o resultado do próximo jogo de seu time, as faces observadas em dois lançamentos de um dado ou a quantidade de etnias indígenas existentes no Brasil em 1500 podem ser considerados experimentos aleatórios.

Chamamos de *espaço amostral* o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório. No primeiro exemplo, o espaço amostral poderia ser $\Omega_1 = \{\text{Vitória, Empate, Derrota}\}$ ou poderia ser um conjunto numérico representando o saldo de gols a favor de seu time. No segundo exemplo, denotando por (i,j) o resultado i do primeiro lançamento e o resultado j do segundo, o espaço amostral pode ser

$$\Omega_2 = \{(i,j) : 1 \leqslant i,j \leqslant 6\} = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), (2,2), \ldots, (6,6)\}.$$

De maneira parecida, no último exemplo, o espaço amostral pode ser o conjunto dos números naturais, $\Omega_3 = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Um *evento* é qualquer subconjunto do espaço amostral. Desta forma, podemos falar, a partir dos exemplos anteriores, dos seguintes eventos:

$$A = \text{“o seu time não perde o próximo jogo”} = \{\text{Vitória, Empate}\}$$

$$B = \text{“segundo lançamento é 2”} = \{(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$$

$$C = \text{“pelo menos 200 etnias”} = \{200, 201, 202, \ldots\}$$

Dois eventos de um experimento aleatório são chamados de *mutuamente exclusivos* se eles não puderem ocorrer simultaneamente. No exemplo dos lançamentos do dado, os eventos B e

$$D = \text{“a soma das faces é 9”} = \{((3,6),\ (4,5),\ (5,4),\ (6,3))\}$$

são *mutuamente exclusivos*, pois não podem ocorrer simultaneamente.

Probabilidade é um conceito fortemente relacionado com informação: a probabilidade de um evento representa a chance de este evento acontecer, de acordo com a informação disponível ao observador. Para estar bem definida, uma probabilidade deve satisfazer certas regras.

Definição

Dizemos que P é uma função de *probabilidade* definida em um conjunto de eventos associados ao espaço amostral Ω se:

1. $0 \leqslant P(E) \leqslant 1$, para todo evento E;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ sempre que E e F forem eventos mutuamente exclusivos.

No exemplo do seu time, você poderia concluir da informação disponível que no próximo jogo

$$P(\text{Vitória}) = 0,4$$

$$P(\text{Empate}) = 0,3$$

$$P(\text{Derrota}) = 0,3$$

Nos dois lançamentos do dado, pode ser razoável supor que todas as faces têm a mesma chance de ocorrer e, assim, nenhum par é mais provável que outro, ou seja,

$$P((i,j)) = 1/36, \text{ para todo } (i,j) \in \Omega_1.$$

Sobre as etnias indígenas no Brasil, um antropólogo voltado a tais estudos poderia afirmar que $P(C) = 0{,}5$ por exemplo.

Diante de uma nova informação, no entanto, é possível que a probabilidade de um evento seja alterada. Por exemplo, qual é a probabilidade de que seu time não perca o próximo jogo se você souber que foi comprado um excelente jogador? Ou qual é a probabilidade de que o evento B ocorra se você souber que ocorreu o evento

$$E = \text{“a soma das faces obtidas é 3”} = \{(1,2),\,(2,1)\}\ ?$$

O antropólogo Darcy Ribeiro estima que em 1957 havia 150 etnias indígenas no Brasil. Conhecendo o processo de dizimação que a população indígena sofreu, poderíamos dizer que, com esta nova informação, a probabilidade de que houvesse mais de 200 etnias indígenas no Brasil em 1500 passa a ser $0{,}8$, por exemplo.

A atualização da probabilidade de um evento em face de uma nova informação é obtida pelo conceito de probabilidade condicional.

Definição

Sejam E e F eventos, tais que $P(F) > 0$. Definimos a *probabilidade condicional* de E dado F como

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}\ .$$

No exemplo dos lançamentos de um dado, a probabilidade de ocorrer o evento B sabendo que ocorreu o evento E, é dada pela definição anterior

$$P(B|E) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{P((1,2))}{P(\{(1,2),\,(2,1)\})} = \frac{1/36}{2/36} = \frac{1}{2}.$$

Observe que a probabilidade de o segundo lançamento ser 2, que era originalmente igual a $1/6$, passa a ser igual a $1/2$ no momento em que nos é informado que a soma das faces é 3.

Quando a nova informação não modifica a probabilidade original de um evento, dizemos que eles são independentes. Mais formalmente, dados dois eventos E, F, com $P(F) > 0$, dizemos que E e F são *eventos independentes* se

$$P(E|F) = P(E),$$

ou, equivalentemente, da definição de probabilidade condicional, E e F são independentes se

$$P(E \cap F) = P(E)P(F).$$

Esta última equação é também válida para o caso em que $P(F) = 0$. Caso contrário, dizemos que E e F são eventos dependentes. No exemplo dos lançamentos dos dados, os eventos B e E são dependentes.

Motivação

Probabilidades condicionais normalmente são pouco intuitivas, pois, ao considerar uma nova informação, devemos reavaliar as probabilidades dos eventos, como vimos no exemplo anterior, ao invés de simplesmente atribuir novos valores arbitrariamente.

Os jogos apresentados neste experimento reforçam esse conceito, apresentando probabilidades condicionais contrárias à nossa intuição. Inicialmente, tais probabilidades são aproximadas a partir da observação de um grande número de jogadas, e, mais adiante nesse documento seu valor exato é obtido através do cálculo teórico das probabilidades (vide árvore de probabilidade na FIGURA 1), corroborando os valores empíricos obtidos.

O experimento

Jogo 1 — Jogo dos Naipes

Lembremos que as regras do jogo são:

1. As cartas são distribuídas, uma vermelha e uma preta para cada equipe;
2. Cada equipe embaralha as cartas viradas para baixo e escolhe uma das cartas ao acaso, sem virar;
3. As duas cartas escolhidas são novamente embaralhadas, viradas para baixo;
4. Uma das cartas é selecionada e desvirada, se for vermelha, vá para o item 1 e recomece o jogo, se for preta, vá para o item 5;
5. Se a outra carta for preta, o time A marca um ponto; se não, o time B marca um ponto;
6. Vence o jogo a equipe que alcançar 10 pontos primeiro.

Etapa 1 **Realização do jogo**

Nesta primeira etapa, os alunos realizam diversas jogadas, registrando os resultados obtidos na Tabela 1 do experimento. Faremos tal procedimento analisando um exemplo de jogo.

Nessa tabela registramos os resultados de cada rodada. Observemos que, nas rodadas em que a primeira carta mostrada foi vermelha, nenhum dos times vence. No entanto, utilizamos todos os resultados obtidos para preencher a tabela.

Carta 1	Carta 2	Time vencedor (A ou B)
Vermelha	Preta	
Vermelha	Preta	
Preta	Vermelha	B
Preta	Preta	A
Preta	Vermelha	B
Preta	Vermelha	B
Vermelha	Vermelha	
Vermelha	Vermelha	
Preta	Vermelha	B
Vermelha	Vermelha	
Preta	Vermelha	B
Vermelha	Vermelha	
Preta	Preta	A
Vermelha	Vermelha	
Preta	Vermelha	B
Vermelha	Vermelha	
Preto	Vermelha	B
Vermelha	Preta	
Vermelha	Preta	
Vermelha	Preta	
Preta	Preta	A
Preta	Preta	A
Preta	Preta	A
Preta	Vermelha	B
Vermelha	Preta	
Vermelha	Vermelha	
Vermelha	Preta	
Preta	Vermelha	B
Preta	Vermelha	B

TABELA 1

O time A marcou 5 pontos e o time B marcou 10. A proporção de vezes que o time A marcou ponto foi $5/15$, que é $1/3$.

Etapa 2 **Análise dos resultados**

Na Etapa 2, analisamos os resultados obtidos, após preencher a Tabela 2 com os dados da classe inteira, como no seguinte exemplo:

Carta 1 \ Carta 2	Preto	Vermelho	Total
Preto	5	10	15
Vermelho	7	7	14
Total	12	17	29

TABELA 2

A segunda carta foi vermelha em $17/29 = 58{,}7\%$ das vezes.

As duas cartas foram da mesma cor em $5 + 7 = 12$ rodadas, ou seja, em $12/29 = 41{,}4\%$ das vezes.

Das $5 + 10 = 15$ vezes em que a primeira carta foi preta, as duas foram da mesma cor 5 vezes, ou seja $5/15 = 33{,}3\%$ das vezes.

Jogo 2 — Jogo das Torradas

Lembremos que as regras do jogo são:

1. Em cada partida, uma das equipes embaralha as três torradas sem que a outra equipe as veja (embaixo da carteira ou de um pano);
2. A equipe que não embaralhou escolhe uma das “torradas” (sem vê-la) e a põe em cima da mesa, com uma das faces visíveis;
3. Se a face visível for dourada, então o time A ganha um ponto se a face de baixo também for dourada; se não, o time B ganha um ponto. Se a face visível for queimada, o time B marca um ponto se a face de baixo for dourada; se não, o time A marca um ponto;
4. Vence o jogo a equipe que chegar em 10 pontos primeiro.

Etapa 3 **Realização do jogo**

Na Tabela 3, registramos os resultados das rodadas, como no seguinte exemplo:

Face visível	**Face oculta**	**Time vencedor**
Dourada	Dourada	A
Dourada	Dourada	A
Dourada	Queimada	B
Dourada	Dourada	A
Dourada	Dourada	A
Queimada	Queimada	A
Dourada	Dourada	A
Queimada	Queimada	A
Queimada	Queimada	A
Queimada	Queimada	A
Queimada	Queimada	A
Total de vitórias do time A		10
Total de vitórias do time B		1

TABELA 3

O time A venceu 10 das 11 rodadas do exemplo, ou seja, em 91% das vezes.

Etapa 4 **Análise dos resultados**

Com as informações da tabela anterior, a Tabela 4 fica como abaixo:

face oculta / face visível	D	Q	Total
D	5	1	6
Q	0	5	5
Total	5	6	11

TABELA 4

A face visível foi dourada 6 vezes em 11, 54,5% das vezes. Destas, em 5 vezes a outra face também foi dourada, em 83,3%. As duas faces foram iguais em 10 vezes das 11 rodadas. Claramente, o time A é favorecido no Jogo 2.

Fechamento

No Fechamento, propomos as soluções teóricas de ambos os problemas.

Solução do Jogo dos Naipes

A seguinte árvore de probabilidade representa as chances de cada um dos resultados, de acordo com os possíveis resultados de cada equipe.

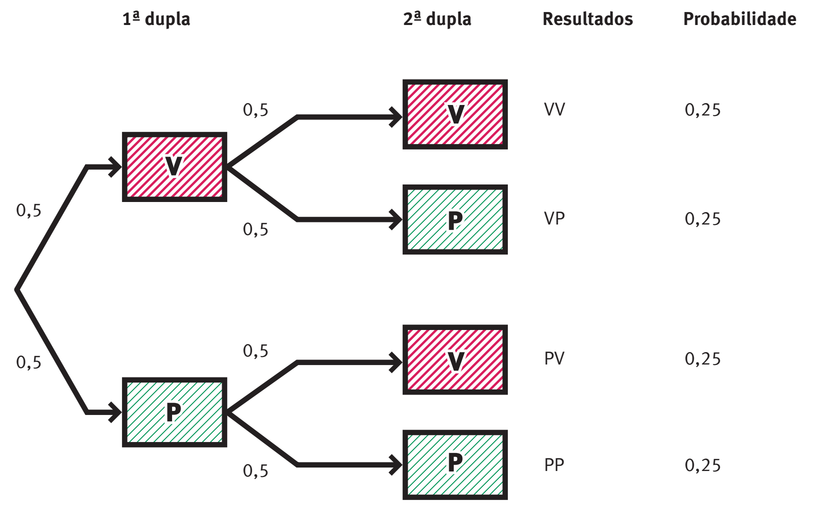


Fig. 1

Os dois primeiros galhos indicam a probabilidade de que a Equipe 1 sorteie uma carta vermelha ou uma preta: 0,5 para cada resultado. Os galhos seguintes indicam a probabilidade de que a Equipe 2 escolha uma carta vermelha ou uma preta, dependendo da carta selecionada pela Equipe 1. Como a seleção da Equipe 1 e a da Equipe 2 são claramente independentes, a carta da Equipe 2 pode ser vermelha ou preta com mesma probabilidade, 0,5, em ambos os casos.

Sendo assim, a probabilidade de selecionar duas cartas vermelhas é $0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$, assim como a de selecionar duas cartas pretas. No entanto, a probabilidade de selecionar duas cores diferentes é 0,5, já que isso pode ocorrer com uma carta vermelha da Equipe 1 e uma preta da Equipe 2, ou vice-versa, ambas possibilidades com probabilidade 0,25.

Estamos interessados na probabilidade condicional, dado que a primeira carta é preta. Desta forma, eliminamos a possibilidade de duas cartas vermelhas: VV. Nosso espaço amostral se reduz então às possibilidades VP, PV e PP. Como, originalmente, todas têm a mesma chance relativa (0,25), então no novo espaço amostral elas continuam com mesma chance relativa, agora igual a $1/3$.

Destas três possibilidades, apenas uma delas (PP) é favorável ao time A. Portanto, a probabilidade do time A marcar um ponto é igual a $1/3$, que é a probabilidade de PP.

Solução do Jogo das Torradas

A seguinte árvore de probabilidade representa as chances de cada um dos resultados, de acordo com as possíveis escolhas de cada equipe.

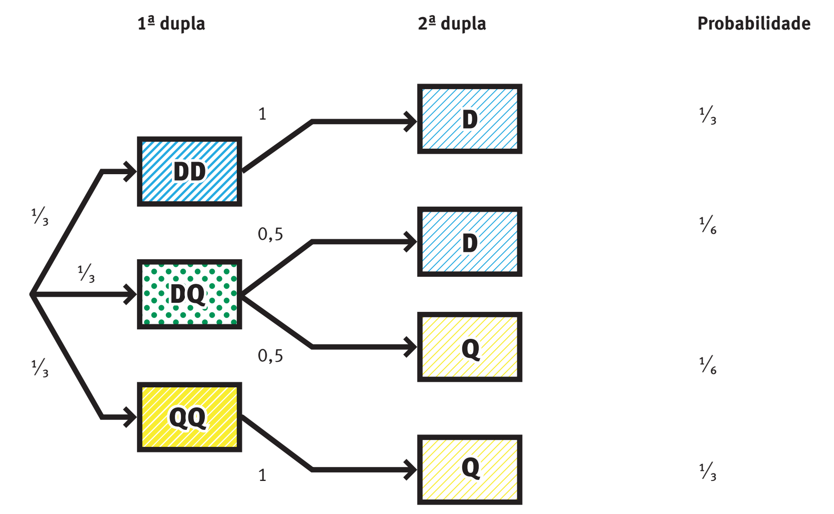


Fig. 2

Novamente, os galhos representam as probabilidades de cada evento. Assim, os primeiros três galhos representam a probabilidade de escolher cada uma das três torradas: $1/3$ cada.

Os galhos seguintes mostram a probabilidade condicional de cada face, para cada uma das torradas. Assim, a torrada com os dois lados dourados tem probabilidade 1 de apresentar lado visível dourado, por exemplo.

A última coluna indica a probabilidade da interseção dos eventos do galho completo. Por exemplo, a probabilidade de escolher a torrada queimada e dourada e observar face dourada é $1/6$.

Suponha que a face visível é dourada, “D”. Com esta informação, a probabilidade de que a face de baixo também seja dourada é

$$
\begin{aligned}
&P(\text{face de baixo igual a de cima} \,|\, \text{“D”}) = \\
&= P(\text{“DD”} \,|\, \text{“D”}) = \frac{P(\text{“DD” E “D”}}{P(\text{“D”})} = \\
&= \frac{P(\text{“DD”})}{P(\text{“D”})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Isso é válido também se a face visível for queimada **“Q”**. Portanto, o time A tem chance $2/3$ de marcar um ponto.

Bibliografia

FELLER, William. **Introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações.** Editora Edgard Blücher, 1976.

MEYER, Paul. **Probabilidade: Aplicações à Estatística.** Livros Técnicos e Científicos Editora, 2003.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autoras
Jordana de Oliveira,
Renata Lussier Spagnol,
Laura Leticia Ramos Rifo

Revisores
Matemática
José Plinio O. Santos
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Fátima Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
José Tadeu Jorge
Vice-Reitor
Fernando Ferreira da Costa

Grupo Gestor de Projetos Educacionais (GGPE – UNICAMP)
Coordenador
Fernando Arantes
Gerente Executiva
Miriam C. C. de Oliveira

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal