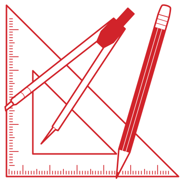
Matemática Multimídia

Guia do professor



Experimento

Arco capaz e navegação

Objetivos da unidade

1. Resolver um problema prático utilizando Geometria Plana;
2. Explorar construções geométricas e suas propriedades;
3. Treinar habilidades no uso de régua e compasso.

UNICAMP

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Arco capaz e navegação

Guia do professor

Sinopse

Neste experimento, os alunos terão o desafio de localizar um ponto no mapa com auxílio de régua, compasso e transferidor, sabendo apenas a localização de três pontos de referência e os ângulos formados entre eles. A proposta pode ser usada como aplicação ou como uma introdução, dependendo do conhecimento dos alunos sobre construções com régua e compasso.

Conteúdos

- Geometria Plana;
- Construções com régua e compasso;
- Obtenção de Arcos Capazes;

Objetivos

1. Resolver um problema prático utilizando Geometria Plana;
2. Explorar construções geométricas e suas propriedades;
3. Treinar habilidades no uso de régua e compasso.

Duração

Uma aula simples.

Matemática Multimídia

Introdução

Durante o período das Grandes Navegações, os conhecimentos de Geometria, sistematizados principalmente pelos gregos, foram mobilizados para a criação de métodos e instrumentos que permitissem aos navegantes encontrarem sua localização. As práticas mais comuns utilizavam estrelas como referência. Instrumentos como o astrolábio, o quadrante e a balestilha foram todos concebidos com esse fim, porém, algumas nuvens no céu poderiam impossibilitar o uso desse tipo de recurso.

Com o passar do tempo, o conhecimento adquirido pelos navegantes foi sendo compilado em cartas náuticas – espécies de "mapas do oceano" que registravam os mais diferentes obstáculos e destinos conhecidos, com suas respectivas distâncias e direções. Em posse dessas cartas náuticas e encontrando alguns pontos conhecidos, como ilhas, montes, faróis e encostas, os navegantes poderiam utilizar métodos que lhes permitissem determinar a localização precisa de seu navio, o que era fundamental para evitar que a embarcação se chocasse, por exemplo, contra rochas e bancos de areia que já tivessem sido mapeados.

Vamos explorar neste experimento um desses métodos de autolocalização.

Motivação

As construções com régua e compasso, apesar de terem ocupado um lugar central no ensino de Matemática por muito tempo, são cada vez menos ensinadas atualmente. Porém, recursos como os softwares de geometria dinâmica podem tornar esse tipo de atividade mais motivante para os alunos.

Além disso, o problema proposto ilustra um recurso que de fato era utilizado pelos navegantes para se localizarem no oceano a partir de uma carta náutica e da observação de pelo menos três pontos conhecidos. Por exemplo, narre aos seus alunos a seguinte situação: uma navio carregado de mantimentos deve chegar ao porto. Porém, há muita neblina e, como é tarde da noite, os navegantes conseguem avistar apenas três pontos. Muito perspicazes, sabem como usar a carta náutica e utilizarão o método dos arcos capazes para encontrarem sua posição exata. Esse é o principal contexto do problema do arco capaz.

O experimento

Comentários iniciais

O problema proposto aos alunos é o seguinte:

Você está perdido no mar, mas consegue avistar três pontos que estão indicados na sua carta náutica: o farol 01, o rochedo e a boia. Pela escala da carta náutica você sabe a distância entre estes três pontos. Além disso, do ponto em que seu barco se encontra, você conseguiu mensurar um ângulo de 70° entre o farol 01 e o rochedo e 60° entre o rochedo e a boia.

Com estas informações, qual é o local do seu barco na carta náutica?"

Etapa 1 **Primeiras tentativas**

Nesta etapa, os alunos devem escolher alguns candidatos a local do barco a partir das informações dadas pelo enunciado. Como essas informações não permitem nenhuma conclusão direta, esperamos que as primeiras tentativas sejam praticamente aleatórias e depois se tornem acuradas.

Escolhidos os pontos, os alunos devem traçar os segmentos e medir os ângulos. Esta pode ser uma boa oportunidade para habituá-los a usar transferidor.

Etapa 2 **A localização**

Matematicamente, podemos dividir o problema em dois, um para cada par de referências observadas.

Vamos considerar os pontos A e B. O segmento AB tem comprimento dado pela carta náutica e o ângulo α, de abertura horizontal entre os dois pontos A e B, é medido por instrumentos no navio. A questão que queremos responder é: qual é o lugar geométrico dos pontos que veem o segmento $\overline{AB}$ sob o ângulo α? Isto é, quais são os possíveis lugares onde o navio está na carta náutica? A resposta para esta pergunta é um arco de círculo, conhecido por arco capaz.

No contexto proposto no Experimento, se considerarmos o outro par de pontos, teremos um segundo arco de círculo. A possível intersecção desses dois arcos permite a localização do navio na carta náutica. Os passos para a obtenção do arco capaz estão descritos no Experimento, em *A localização*.

Demonstração

Agora, vamos demonstrar que o lugar geométrico dos pontos P que veem o segmento $\overline{AB}$ sob o ângulo α é um arco de círculo que contém os pontos A e B.

Primeiramente, note que os passos da construção descrita no Experimento são sempre possíveis, exceto se o ângulo de abertura entre os pontos observados for igual a 0°, o que não faz sentido para a situação descrita, pois isso implicaria nos pontos P, A e B alinhados (neste caso, um ponto não estaria visível ao observador). Assim, vamos considerar que o ângulo α é estritamente maior que zero.

É fácil verificar que α é igual a 180° se e somente se os pontos A, P e B estiverem alinhados. Neste caso, o arco se degenera para o segmento de reta AB.

Ângulos maiores que 180° não fazem sentido para o problema de avistar dois pontos, já que o ângulo de visada humano não pode ultrapassar essa medida. Assim, vamos considerar que o ângulo α seja estritamente menor que 180°. Em resumo, falta a demonstração para o caso $0 < \alpha < 180°$.

Inicialmente, vamos demonstrar que todos os pontos P do arco capaz construído veem o segmento de reta $\overline{AB}$ por um ângulo α. A imagem abaixo ilustra a construção final descrita no Experimento.

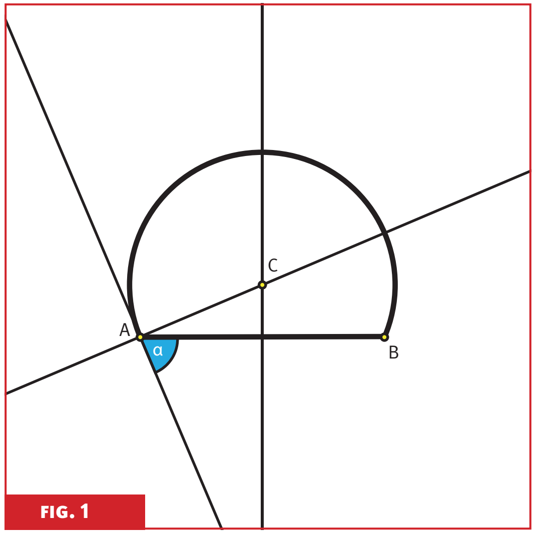


FIG. 1

Na imagem a seguir, acrescentamos um ponto P sobre o arco obtido, as cordas que ligam esse ponto aos pontos A e B, e os triângulos ABC, PCA e PCB.

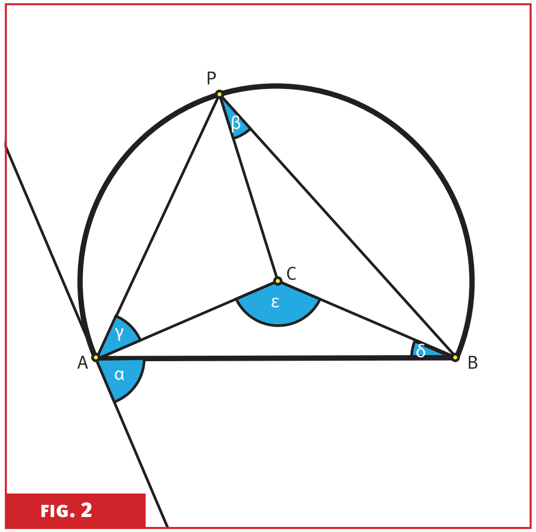


FIG. 2

Os triângulos com vértices na origem do centro do círculo são isósceles, pois dois de seus lados são os raios do círculo. Destes três triângulos e do contorno em torno do ponto C, extraímos as seguintes igualdades:

$$\epsilon + 2\delta = 180^\circ$$
$$\epsilon_a + 2\gamma = 180^\circ$$
$$\epsilon_b + 2\beta = 180^\circ$$
$$\epsilon + \epsilon_a + \epsilon_b = 360^\circ$$

onde $\epsilon_a \equiv A\hat{C}P$ e $\epsilon_b \equiv B\hat{C}P$. As igualdades dos ângulos significam congruência. Somando as três primeiras equações e usando a última, obtemos o seguinte:

$$2(\gamma + \beta + \delta) = 180^\circ$$

E, pela construção do arco, o ângulo entre o segmento $\overline{AC}$ e a reta apresentada na figura é reto. Isto é,

$$\alpha + \delta = 90^\circ.$$

Subtraindo as duas últimas equações, concluímos que

$$\gamma + \beta = \alpha.$$

Em outras palavras, o ângulo $A\hat{P}B = \gamma + \beta$ é o próprio ângulo α da construção do arco capaz. Note que o ponto P pode estar em qualquer outra posição do arco construído. Portanto, todos os pontos pertencentes ao arco capaz veem o segmento $\overline{AB}$ sob o ângulo α, assim como queríamos demonstrar.

Agora vamos demonstrar que, se algum ponto vê o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo α, então ele pertence ao arco capaz deste segmento.

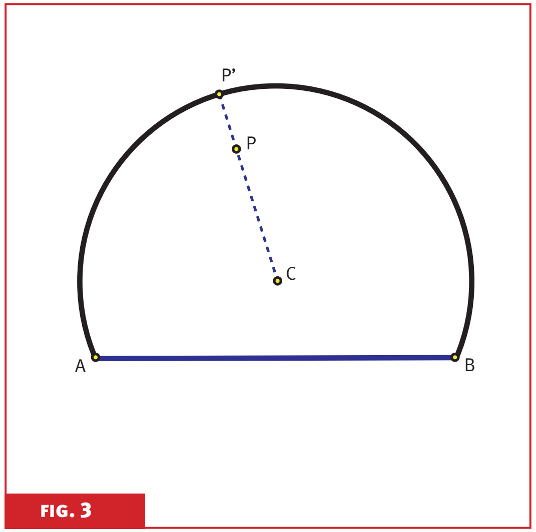


FIG. 3

Considere a figura acima com o segmento $\overline{AB}$ e o seu arco capaz para o ângulo α já construído. Considere também um ponto P dentro da região determinada pelo arco e pelo segmento. Vamos supor que P também enxerga $\overline{AB}$ sob α.

Agora, tracemos um raio da circunferência que determina o arco capaz passando por P. Note que, para qualquer ponto P, existe um ponto P' ao longo do raio que pertence ao arco capaz. Na figura abaixo, a hipótese é que $\eta = \alpha$.

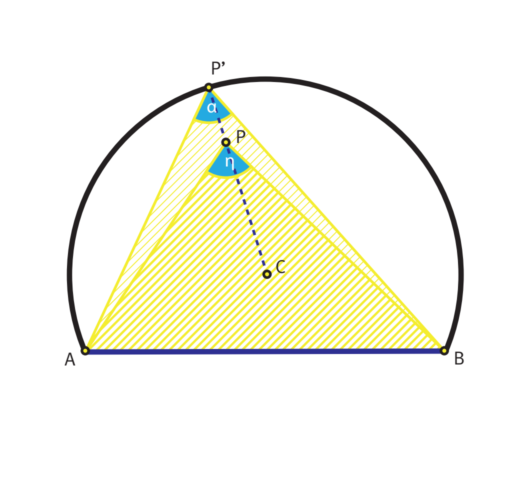


FIG. 4

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°, portanto, analisando o quadrilátero $P'APB$, temos que:

$$\begin{aligned} &\alpha + (360^\circ - \eta) + P'\hat{A}P + P\hat{B}P' = 360^\circ \\ \Rightarrow\ &\alpha + (360^\circ - \alpha) + P'\hat{A}P + P\hat{B}P' = 360^\circ \\ \Rightarrow\ &P'\hat{A}P + P\hat{B}P' = 0^\circ \end{aligned}$$

Como $P'\hat{A}P$ e $P\hat{B}P'$ são positivos, isso implica ambos iguais a zero. Portanto, todos os ângulos dos triângulos PAB e $P'AB$ são iguais e, como eles têm um lado em comum, todos os seus lados são iguais, $P' = P$. Em outras palavras, não há pontos no interior do arco capaz que também enxergam $\overline{AB}$ sob α. O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao caso do ponto P externo à região delimitada pelo arco capaz e o segmento $\overline{AB}$.

Com isso, demonstramos que o lugar geométrico de todos os pontos que enxergam um determinado segmento sob um determinado ângulo é o arco capaz, construído da maneira descrita no Experimento.

Fechamento

Como dito no Experimento, consideramos fundamental que no Fechamento desta atividade os alunos entendam a construção que lhes foi apresentada e não apenas decorem o algoritmo. Para alunos que já estiverem familiarizados com construções com régua e compasso, esta atividade mostrará uma aplicação interessante e contextualizada destas ferramentas. Para alunos que não aprenderam usar régua e compasso para desenhos geométricos, este experimento serve para apresentá-los a um ramo da Matemática que foi fundamental para o desenvolvimento da Geometria na Grécia Antiga e continua sendo estudada e utilizada em certos contextos.

Variações

Esta atividade, pela similaridade nos conteúdos envolvidos, pode servir como ponto de partida para a discussão dos métodos utilizados na Antiguidade na determinação de medidas astronômicas, como o raio da Terra, distância Terra-Lua e distância Terra-Sol. Uma boa referência sobre esses pontos é o texto “A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga”, de Geraldo Ávila e disponível gratuitamente em *http://portal.mec.gov.br/index.php/?option=com_content&view=article&id=12314* (Parte 1 do Volume 2).

Uma variação interessante é desenvolver a atividade em um lugar aberto. Pode ser uma quadra de esportes ou uma área livre segura próxima à escola, área esta que chamaremos de Mar.

Primeiramente, os alunos devem fazer um mapa em escala deste Mar com a colocação de três pontos de referência. Depois, os alunos devem ser divididos em duplas e começar o seguinte jogo: um dos alunos vai colocar uma venda nos olhos do seu parceiro. Este deve ser levado ao Mar pelo outro da dupla, de forma que não saiba exatamente sua localização.

Uma vez no Mar, o aluno vai ouvir sucessivamente algum som produzido dos pontos de referência. Com os braços ele vai estimar a abertura, isto é, o “ângulo de audição” dos pares de pontos de referência. Com essa informação, os alunos devem voltar à sala e usar o método do arco capaz para localizar o aluno no mapa do Mar. O procedimento pode ser repetido alternando a vez de quem ficará vendado.

Esta atividade ao ar livre requer mais tempo e tem um empecilho: a nossa percepção auditiva é muito aguçada, de forma que, pela intensidade do som ouvido, podemos estimar as distâncias (e então o arco capaz não mais será necessário). Assim, quem vai produzir o som não pode ser revelado ao aluno vendado antes de ele ir para o Mar. Mesmo assim, é uma atividade lúdica e desafiadora.

Bibliografia

Rezende, Eliane Quelho Frota; Queiroz, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas.** Campinas: Editora da Unicamp, 2000.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autores
Leonardo Barichello e
Samuel Rocha de Oliveira

Revisores
Matemática
Antônio Carlos do Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico
Preface Design

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (imecc – unicamp)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

licença Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL