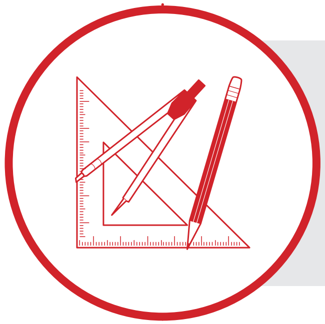
Matemática Multimídia

NÚMEROS E FUNÇÕES



GUIA DO PROFESSOR

Experimento

A matemática dos calendários

Objetivos da unidade

1. Entender e aplicar algoritmos;
2. Revisar o uso de operações básicas.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

A matemática dos calendários

Guia do professor

Sinopse

Este experimento apresenta maneiras de se descobrir o dia da semana de qualquer data do calendário gregoriano, no passado ou futuro.

Conteúdos

Conjuntos, Lógica e Números: Noções de Lógica e Divisibilidade.

Objetivos

1. Entender e aplicar algoritmos;
2. Revisar o uso de operações básicas.

Duração

Duas aulas simples.

Matemática Multimídia

Introdução

Há muito que o homem se preocupa em registrar de forma empírica o passar do tempo. O dia e o ano, por exemplo, podem ser observados por qualquer pessoa, já que suas definições se baseiam em considerações astronômicas. No entanto, as definições de semana e mês são muito dependentes da cultura de cada povo ao longo da história.

Esta atividade mostra que a construção de calendários possui alguns elementos arbitrários e também que podemos usar algoritmos com operações básicas de matemática para relacionar uma data estabelecida no calendário ao dia da semana em que ela se deu.

No caso do calendário contemporâneo, o Gregoriano, temos as informações do dia da semana escondidas nas datas. Por exemplo, para recuperar em que dia da semana aconteceu 27 de maio de 1962, basta recorrer a um algoritmo. Por mais simples que pareça, o assunto de calendário é recheado de conhecimento e de cultura acumulados.

O período que usamos nos calendários é o *ano tropical*, que é o período de revolução da Terra em torno do Sol em relação ao próprio Sol, e sua duração média no ano 2000 foi de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 45,252 segundos.

A duração do ano não é um número natural de dias. Como podemos perceber, a duração do ano precisa ser representada em forma de fração. Justamente essas frações de dias causaram problemas históricos nas construções de calendários - alguns tinham 365 dias apenas ou, pior ainda, tinham 360 dias, e as diferenças iam se acumulando a cada ano, o que, depois de alguns anos, faziam com que as datas usualmente associadas às estações estivessem completamente erradas. Por esse motivo o papa Gregório estabeleceu o procedimento que seguimos atualmente, que segue da relação matemática:

$$365,2425 = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}.$$

É uma forma um pouco arbitrária, pois a parte não inteira não tem uma decomposição única em frações, mas os 0,2425 de um dia – que equivalem a 5 horas, 49 minutos e 12 segundos – corrige com excelente aproximação o ano tropical. Hoje sabemos que o erro é de menos de meio minuto e o tempo de revolução em torno do Sol varia bem pouquinho ao longo do tempo por várias razões físicas que não vamos discutir aqui.

Notem que a noção de mês que usamos tem óbvias origens no período de revolução da Lua em torno da Terra, que é de 29,53 dias. No entanto, o período associado à semana de 7 dias tem origens mais culturais e religiosas do que astronômicas, pois as fases da Lua têm duração média de 7 dias e mais de 9 horas, isto é, as fases da Lua e a semana não ficam sincronizadas.

A história antiga dos calendários é muito rica, mas vamos recordar apenas que o Imperador Júlio ordenou uma reforma de calendário, em 45 AC, com a introdução do ano bissexto a cada quatro anos. Dessa forma, o ano do calendário Juliano tinha em média 365,25 dias, isto é, $365 + 1/4$: o ano começava em março e terminava em fevereiro, quando o dia extra era adicionado (a cada 4 anos).

O ano Juliano era dividido em 12 meses. No entanto, 12 não divide exatamente nem 365 nem 366. Para ser mais claro,

$$\frac{365}{12} = 30 + \frac{5}{12} = 30 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}.$$

Isso significa que o ano poderia ter 7 meses de 30 dias e 5 meses de 31 dias.

Enquanto que

$$\frac{366}{12} = 30 + \frac{1}{2} = 30 + \frac{6}{12}$$

implicaria 6 meses de 31 dias e 6 meses de 30 dias.

Mas a simplicidade das frações matemáticas acima não foi adotada por caprichos dos imperadores. Em termos matemáticos, a divisão atual do ano em meses, feita por Júlio e depois por Augusto é

$$\frac{365}{12} = 30 + \frac{7}{12} - \frac{2}{12},$$

isto é, 7 meses com 31 dias e um mês com 28 dias. No ano bissexto, o mês de 28 dias tem 29 dias.

O calendário Gregoriano corrigiu mais uma parte do ano tropical e, por isso, é o utilizado atualmente. Este guia não vai tratar de vários temas relacionados aos calendários e às datas, mas é possível desenvolver discussões e pesquisas muito interessantes nessas linhas.

Motivação

O assunto possui vários aspectos atraentes para o aluno, como, por exemplo, descobrir o dia da semana em que ele nasceu. Além disso, ele vai aprender o porquê dos anos com 366 dias (anos bissextos) ou 365 dias (anos normais).

O experimento

Comentários iniciais

O ano tropical médio no ano 2000 teve 365,242190419 dias. Esse número é usado para representar o período de um ano. Tantas casas decimais assim são importantes para os astrônomos e engenheiros do espaço, mas pouco afetam o nosso cotidiano.

Etapa 1 **É bissexto?**

O algoritmo apresentado no experimento vale para datas de acordo com o calendário gregoriano, mas nem todos os países adotaram imediatamente esse calendário decretado em 1582. Sendo assim, o algoritmo deve ser usado com as devidas restrições históricas e geográficas.

Nesta etapa do experimento, o aluno deve entender que os anos bissextos têm um dia a mais, 29 de Fevereiro.

Depois de escolher o dia da semana em um determinado ano, precisamos calcular (recomendamos o uso de calculadora simples):

- O intervalo Δ em anos até a data desejada;
- $B =$ quantas vezes aconteceu o dia 29 de fevereiro entre essas datas;
- $D = 365 \times \Delta + B$, que são os dias transcorridos entre as datas;
- $C = D \bmod 7$;
- Note que C só pode resultar valores naturais de 0 a 6. E, como $1 = 365 \bmod 7$, concluímos que $C = (\Delta + B) \bmod 7$.

Etapa 2 **Qual é o dia da semana?**

Usamos como calendário de referência o de 2009. A tabela abaixo é parecida com a que usamos no experimento, mas explicitamos o dia da semana do ano 2009 e os valores calculados no algoritmo. Assim:

As respostas da Etapa 2 são:

- 11/9/2009 é sexta-feira. Então, para 11/9/2001, temos $\Delta = 8$, $B = 2$, $C = 3$ e retornamos 3 dias para terça-feira.
- 13/12/2009 é domingo. Então, para 13/12/1968, temos $\Delta = 41$, $B = 10$, $C = 2$ e retornamos dois dias para sexta-feira.
- 11/2/2009 é quarta-feira. Então, para 11/2/1922, temos $\Delta = 87$, $B = 22$, $C = 4$ e retornamos quatro dias para sábado.
- 15/11/2009 é domingo. Então, para 15/11/1889, temos $\Delta = 120$, $B = 29$, $C = 2$ e retornamos dois dias para sexta-feira.

- 20/7/2009 é domingo. Então, para 20/7/1969, temos $\Delta = 40, B = 9, C = 0$ e obtemos domingo.
- 29/2/1972: temos que o dia seguinte a 28/02/2009 é domingo. Então, temos $\Delta = 37, B = 9, C = 4$ e retornamos quatro dias para quarta-feira, dia 1/2/1972, e assim o dia 29/2/1972 é terça-feira.

É bem provável que haja erro nos cálculos dos alunos, então, estimule-os a conferir e discutir os resultados com os colegas.

Fechamento

O experimento dos calendários valoriza o cálculo de várias divisões e seus restos. Os imperadores tiveram que escolher como lidar com o resto da divisão de 365 por 12 para saber quantos dias teriam os meses do ano. Para saber quantos dias bissextos há entre determinadas datas, podemos usar a parte inteira da divisão por quatro. Finalmente, para saber qual é o dia da semana de determinada data, devemos usar o resto da divisão por sete. Desta forma, o experimento aplica e revisa conceitos básicos de divisão.

Poderemos também apresentar melhor a regra de correção de nosso calendário corrente: os astrônomos consideram atualmente (ano 2000 d.C.) que a Terra demora aproximadamente 365,242190 dias para dar uma volta completa em torno do Sol. Na Folha do Aluno há um Pense e Responda que pede aos alunos para calcular quanto vale 365,242190 em dias, horas, minutos e segundos (aproximadamente 365 dias 5 horas, 48 minutos e 45 segundos). Compare esse número com o período de 365,2425 dias (356 dias 5 horas 49 minutos e 12 segundos) usados para o algoritmo gregoriano. Esse algoritmo implementa a seguinte fração:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}, \text{ que resultada em } \frac{97}{400}.$$

E, para finalizar, peça sugestões para ajustar melhor ainda a parte fracionária para 0,242190. Uma sugestão é encontrar uma correção para a diferença $0,24250 - 0,24219 = 0,00031$, que representa 31 dias em 100 mil anos. Uma proposta em consideração entre os astrônomos é subtrair a fração $1/3300$ dos $97/400$. Essa subtração resultaria em aproximadamente 0,242197, que não corrige de maneira exata, mas é uma boa aproximação. A interpretação para isso é que se deve extrair um ano que seria bissexto a cada 3300 anos.

Variações

Consideremos um dos calendários Maya, o longo. Esse calendário não tem sincronia com o ano tropical. Em poucas palavras, eles consideravam um uinal de 20 dias e um tun de 18 uinais, totalizando 360 dias. O uinal e o tun seriam similares a mês e ano. No entanto, os maias consideravam períodos ainda maiores de maneira hierárquica, múltiplos de 20: um katun tem 20 tuns; um baktun tem 20 katuns; um pictun tem 20 baktuns, e assim por diante. Neste calendário, a data é indicada por:
baktun . katun . tun . uinal . kin

Segundo historiadores, o calendário Maya começou em 0.0.0.0, que seria em torno de 11 de agosto de 3114 A.C. e, a título de curiosidade, o dia 1º de janeiro de 2000 é representado por 12.19.6.15.2.

Assim, podemos calcular quanto dias se passaram desde o início do calendário Maya até o início do ano 2000:

$$\begin{gathered} 2 + 15 \times 20 + 6 \times 18 \times 20 + 19 \times 20 \times 18 \times 20 \\ + 12 \times 20 \times 20 \times 18 \times 20 = 1867262, \end{gathered}$$

que dariam 5112 anos tropicais! Sabendo que 1º de janeiro de 2000 foi sábado, concluímos que a data 0.0.0.0 foi segunda-feira! É uma curiosidade apenas, mas reforça o poder do algoritmo de calcular o dia da semana a partir do resto da divisão por 7.

Que dia do ano e da semana vai ser representado por 13.0.0.0.0 nesse calendário Maya?

Bibliografia

Duncan, David Ewing. **The Calendar**. London: Fourth Estate, 1998.

Donato, Hernani. **Historia do calendario**. São Paulo: Melhoramentos : inl, c1976. 158p. (Serie Prisma-Brasil ;27), 1976.

Paixão, Fernando. **Matemática e o calendário. Calendário e a medida do tempo**. Disponível em ‹*http://calendario.incubadora.fapesp.br/portal/textos/teste/o-calendario-e-a-matematica*› Acesso em: 18 de fevereiro de 2009.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Samuel Rocha de Oliveira

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico
Preface Design

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (imecc – unicamp)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL