Matemática Multimídia

O EXPERIMENTO

Experimento

A matemática dos calendários

Objetivos da unidade

1. Entender e aplicar algoritmos;
2. Revisar o uso de operações básicas.

UNICAMP

LICENÇA Esta obrá está licenciada sob uma licença Creative Commons

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

A matemática dos calendários

O experimento

Sinopse
Este experimento apresenta maneiras de se descobrir o dia da semana de qualquer data do calendário gregoriano, no passado ou futuro.

Conteúdos
Conjuntos, Lógica e Números: Noções de Lógica e Divisibilidade.

Objetivos
1. Entender e aplicar algoritmos;
2. Revisar o uso de operações básicas.

Duração
Duas aulas simples.

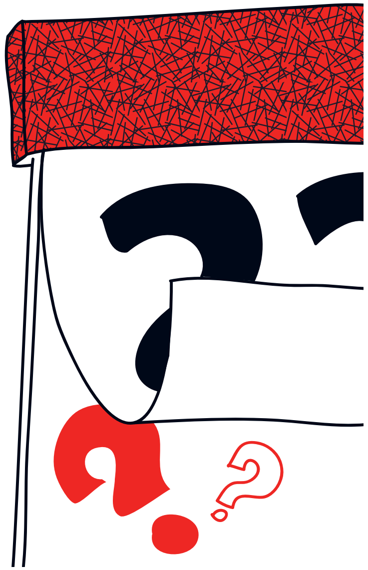
Matemática Multimídia

Introdução

É comum assistirmos em programas de televisão pessoas que apresentam "habilidades especiais" para memorizar dias da semana de anos anteriores. Surgem, então, várias questões: essas pessoas realmente memorizam datas passadas ou têm facilidade em utilizar algoritmos?

Achamos que a segunda resposta corresponde melhor ao que chamamos de verdade. O procedimento envolvido nesses algoritmos é acessível para qualquer pessoa que saiba usar as quatro operações básicas. O desafio, na verdade, é criar uma sequência de passos que direcionem o exercício mental. Com pouco treino é possível até impressionar seus amigos e familiares.

Saber criar e lidar com algoritmos é interessante e pode ser útil no mundo informatizado de hoje.



O Experimento

Material necessário

- Calendário do ano corrente.

Preparação

Divida a sala em duplas ou trios, pois não é necessário um grupo grande para o experimento. Apenas sugerimos que os alunos tenham alguém com quem discutir ao longo da atividade.

Já que usaremos muito o conceito de algoritmo, abaixo apresentamos sua definição.

Definição

Algoritmo
Sequência finita de regras, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite solucionar classes semelhantes de problemas.

Regras do Calendário Gregoriano

Breve histórico do calendário Gregoriano
Em 1582 o papa Gregório XIII convocou uma equipe de matemáticos e astrônomos para criar um calendário que se adequasse melhor à quantidade de tempo que nosso planeta leva para dar uma volta completa em torno do Sol. Depois de muitas propostas apresentadas, foi adotado o seguinte procedimento, com o *ano bissexto de 366 dias* e *ano normal de 365 dias*:

- Anos múltiplos de 4 são bissextos;
- Anos múltiplos de 100 que não são múltiplos de 400 são normais;
- Anos múltiplos de 400 são bissextos.

\+ *Antes do calendário Gregoriano, predominava na Europa o calendário Juliano. Para saber mais detalhes sobre as diferenças entre eles, consulte o* GUIA DO PROFESSOR.

* *Note que o ano 2000 foi um ótimo exemplo de aplicação deste algoritmo, tendo 366 dias: 2000 é múltiplo de 4, de 100, e também é múltiplo de 400.*

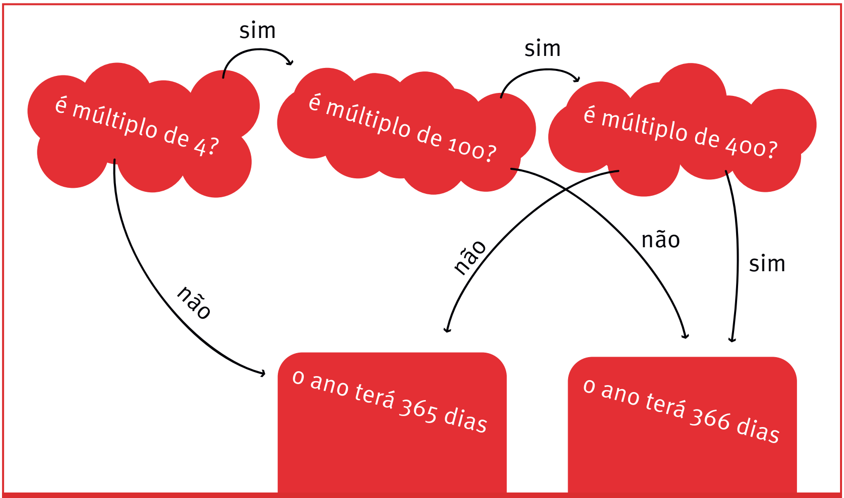


FIG. 1 *Algoritmo de funcionamento do calendário gregoriano.*

É bissexto?

ETAPA
1

Copa ou olimpíada?
Na primeira etapa, vamos explorar um pouco os anos bissextos para nos acostumar com o algoritmo.

Questão aos alunos

Dentre os anos abaixo, quais são bissextos?

- 1987: não é bissexto, ímpar;
- 1658: não é bissexto, não é múltiplo de 4;
- 1928: bissexto, múltiplo de 4 e não múltiplo de 100;
- 2100: não é bissexto, é múltiplo de 4 e também é múltiplo de 100;
- 2800: bissexto, múltiplo de 400.

Depois de deixar os alunos debruçados no problema por alguns minutos, retome a atenção e fale um pouco sobre como funciona um algoritmo. Sugerimos, inclusive, que a FIGURA 1 seja reproduzida na lousa para que os alunos possam acompanhar melhor o raciocínio.

Uma ilustração que pode ser feita com os alunos é utilizar dois eventos importantes que acontecem periodicamente a cada 4 anos, são eles a Copa do Mundo de Futebol e as Olimpíadas, sendo que a primeira acontece nos anos pares não múltiplos de 4 e a segunda se dá nos anos múltiplos de 4. Assim, dado um ano par, é possível saber se houve Copa do Mundo ou Jogos Olímpicos.

Contagem dos bissextos

Antes de pedir que os alunos determinem qual o dia da semana em que algum evento ocorreu, vamos elaborar mais uma ferramenta, a contagem do número de anos bissextos em certo intervalo de tempo.

Questão aos alunos

Você sabe dizer quantos anos foram bissextos desde o ano de seu nascimento?

Para tal, sugerimos o seguinte procedimento:

Calcule a diferença entre o último ano bissexto (antes do ano corrente) e o primeiro ano bissexto desde a data do nascimento. Por exemplo, vamos supor que alguém tenha nascido em 1915 e queira saber quantos anos foram bissextos desde o seu nascimento: o último ano bissexto anterior a 2009 foi 2008; e o primeiro ano bissexto depois de 1915 foi 1916. Logo, a diferença entre essas duas datas é de 92 anos.

O próximo passo é dividir o resultado da diferença por 4 e somar uma unidade ao quociente: 92 dividido por 4 é 23; esse quociente mais uma unidade é $23+1=24$, ou seja, foram 24 anos bissextos no total.

* *Professor, aproveite para lembrar os alunos do critério de divisibilidade por 4: para que um número seja divisível pelo número 4, basta que os dois números finais sejam divisíveis por 4.*

É imprescindível que, depois de encontrar o resultado final, verifiquemos se há alguma possibilidade de o resultado se alterar de acordo com as regras da FIGURA 1. No nosso exemplo, dentro do intervalo que calculamos, temos o ano 2000, que é múltiplo de 100 e também de 400, portanto, é bissexto e não interfere no resultado acima.

Qual é o dia da semana?

ETAPA
2

Esteja certo de que todos os grupos possuem calendários do ano atual. Peça aos alunos que encontrem uma maneira de calcular o dia da semana em que ocorreram os eventos listados na FOLHA DO ALUNO.

Professor, espere que os grupos calculem algumas datas e, quando perceber que eles estão conseguindo calcular as respostas, porém sem muita certeza sobre elas, escreva na lousa as respostas para as datas a seguir, a fim de orientá-los melhor:

- 11/09/2001 (ataque terrorista em Nova Iorque);
- 11/02/1922 (início da Semana de Arte Moderna em São Paulo);
- 29/02/1972 (exemplo de dia acrescentado ao ano bissexto).

* *A primeira conclusão provavelmente será a de que, de um ano para outro, a data varia em um ou dois dias da semana.*

Assim, os alunos poderão verificar se estão obtendo sucesso até o momento e, caso contrário, pensar nas correções. É provável que os alunos resolvam o primeiro problema calculando o dia da semana, ano a ano. Isso pode até ser viável para certas datas, mas *não se esqueça de lhes mostrar que, para datas mais distantes, essa maneira não é conveniente*. Sugerimos o seguinte algoritmo:

- Olhe no calendário do ano atual em qual dia da semana cairá a data escolhida;
- Veja qual a diferença de anos entre o ano atual e o ano da data escolhida (chamaremos essa diferença de Δ);
- Conte quantos anos bissextos aconteceram no intervalo em questão. Precisamos saber quantos dias foram 29 de fevereiro entre as datas escolhidas (para tal, temos o algoritmo sugerido na etapa anterior);
- Chamaremos de B a quantidade de vinte e noves de fevereiro existentes entre a data no calendário atual e a data no calendário desejado;
- Para saber quantos dias se passaram, multiplique Δ por 365 e some B. Chamaremos este número de D, isto é, $D = 365 \times \Delta + B$;

! *Note que faz diferença saber se a data é antes ou depois de 28 de fevereiro.*

Congruência

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}, m\ 0$. Dizemos que a é congruente a b módulo m e escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$ se $a - b$ for divisível por m.

Isso significa que a e b deixam o mesmo resto na divisão por m (no caso, usaremos o menor natural possível, que é o próprio resto da divisão de a por m). Por exemplo, $365 \equiv 1 \pmod{7}$, pois $365 - 1$ é 364, que é divisível por 7, assim como 365 tem quociente 52 e resto 1.

Neste caso, significa que o ano normal tem 52 semanas e 1 dia.

- Calculamos, então, a menor congruência $\text{módulo } 7$ de D, e o valor será chamado de C;
- Caso a data seja no passado, teremos que retroceder na semana C dias; caso seja no futuro, então serão C dias para frente. Ou seja, caso o dia que procuramos caia na terça-feira no ano atual e C for 2, então no ano buscado esta data caiu em um domingo (se o ano buscado for anterior ao corrente) ou cairá numa quinta-feira (se o ano buscado for posterior ao corrente).

* *No nosso calendário, de um ano normal para outro, a data desloca-se na semana exatamente um dia, porque nossa semana possui 7 dias.* $365 \equiv 1 \pmod{7}$

Como provavelmente os alunos perceberão que de um ano normal para outro a data se desloca um dia da semana, no primeiro cálculo eles contarão os anos e retrocederão essa quantidade de dias, e depois retrocederão os bissextos. Porém, como já dito anteriormente, à medida que as datas se distanciam, essa maneira se demonstra trabalhosa e lenta. Cabe então uma dica: peça para que eles encontrem outra data que se distancie da data almejada em um número múltiplo de 7. Por exemplo, os dias 11 e 25 de qualquer mês, como há 14 dias entre eles, ambos caem no mesmo dia da semana.

Então mostre: entre 11 e 25 são 14 dias, isto é, $14 \equiv 0 (\bmod 7)$. E se analisarmos o intervalo 11 e 26, o que aconteceria? E se fosse o dia 27? Já é possível enxergar alguma relação?

Assim, os alunos poderão perceber a eficiência de usar o resto da divisão por 7.

* *Uma sugestão para o cálculo do dia 29 de fevereiro quando o ano referência não é bissexto: calcule quando cai o dia 28 e a resposta será o próximo dia da semana.*

As respostas da Etapa 2 são:

- 11/09/2001 – terça-feira;
- 13/12/ 1968 – sexta-feira;
- 11/02/1922 – sábado;
- 15/11/1889 – sexta-feira;
- 20/07/1969 – domingo;
- 29/02/1972 – terça-feira.

Fechamento

Para finalizar a atividade, discuta os algoritmos que apareceram. Com a ajuda dos alunos, escreva na lousa um bom algoritmo para o calculo de dias da semana de datas passadas ou futuras.

É interessante falar sobre as curiosidades astronômicas existentes no nosso calendário, as influências das estações, Lua e Sol em sua organização (curiosidades abordadas no Guia do Professor).

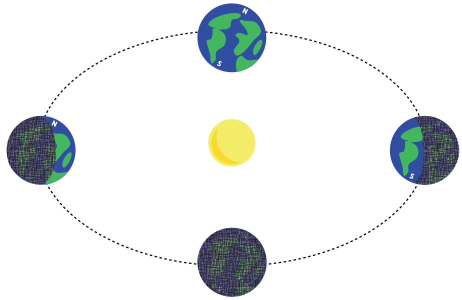


FIG. 2 *Solstícios e Equinócios.*

Se possível, apresente aos seus alunos alguns outros calendários, como o judaico, o chinês ou o revolucionário francês, no qual a semana é distribuída em 10 dias ao invés de 7. Artigos sobre esses calendários são facilmente encontrados com a ajuda de sites de busca na internet.

Poderemos também apresentar melhor a regra de correção de nosso calendário corrente: os astrônomos consideram atualmente (ano 2000 d.C.) que a Terra gasta aproximadamente 365,242190 dias para dar uma volta completa em torno do Sol. Na Folha do Aluno há um Pense e Responda que pede que os alunos calculem quanto vale 365,242190 em dias, horas, minutos e segundos (aproximadamente 365 dias 5 horas, 48 minutos e 45 segundos).

O algoritmo gregoriano considera o período de 365,2425 dias, que são 356 dias 5

* *Nestas etapas, sempre peça auxílio e sugestões aos seus alunos em busca de maior interatividade.*

horas 49 minutos e 12 segundos, usados para o algoritmo gregoriano.

Para começar a discussão sobre o algoritmo, pergunte aos alunos como podemos escrever 0,2425 na forma de fração. A maneira mais intuitiva de se transformar esse número decimal em fração é $^{2425}/_{10000}$, porém, ao simplificar pelo divisor comum 25, obteremos a fração equivalente $^{97}/_{400}$, assim $365,2425 = 365 + {}^{97}/_{400}$. Como todo ano sobra essa fração de dias, em 400 anos sobram 97 dias. E, se é necessário ter 97 dias em 400 anos, é preferível distribui-los da maneira mais uniforme possível.

Utilize, então, as regras de correção e escreva-as em forma de fração na lousa.

- Anos múltiplos de 4 são bissextos, ou seja, $+^{1}/_{4}$;
- Anos múltiplos de 100 são normais mesmo sendo múltiplos de 4, ou seja, $-{}^{1}/_{100}$;
- Anos múltiplos de 400 são bissextos, ou seja, $+{}^{1}/_{400}$.

Peça aos alunos que façam a soma

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}.$$

O resultado será $\dfrac{97}{400}$.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Samuel Rocha de Oliveira

Coordenação de redação
Fabricio de Paula Silva

Redação
Luiz Fernando Giolo Alves

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara de Oliveira

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

licença Esta obrá está licenciada sob uma licença Creative Commons

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL