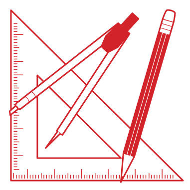
Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS

**O EXPERIMENTO**



# Experimento

## A altura da árvore

**Objetivos da unidade**

1. Desenvolver a habilidade para utilizar um transferidor;
2. Apresentar, experimentalmente, a noção de tangente de um ângulo;
3. Usar a noção de tangente para medir uma altura inacessível.

UNICAMP



FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

# A altura da árvore

## O experimento

**Sinopse**

Experimentalmente os alunos serão expostos ao significado da tangente de um ângulo interno do triângulo retângulo. Esse novo conceito será usado para, depois de construir uma ferramenta capaz de medir ângulos verticais, encontrar a altura de objetos como antenas, árvores, prédios ou postes.

**Conteúdos**

- Trigonometria no triângulo retângulo, Função tangente.

**Objetivos**

1. Desenvolver a habilidade para utilizar um transferidor;
2. Apresentar, experimentalmente, a noção de tangente de um ângulo;
3. Usar a noção de tangente para medir uma altura inacessível.

**Duração**

Uma aula dupla.

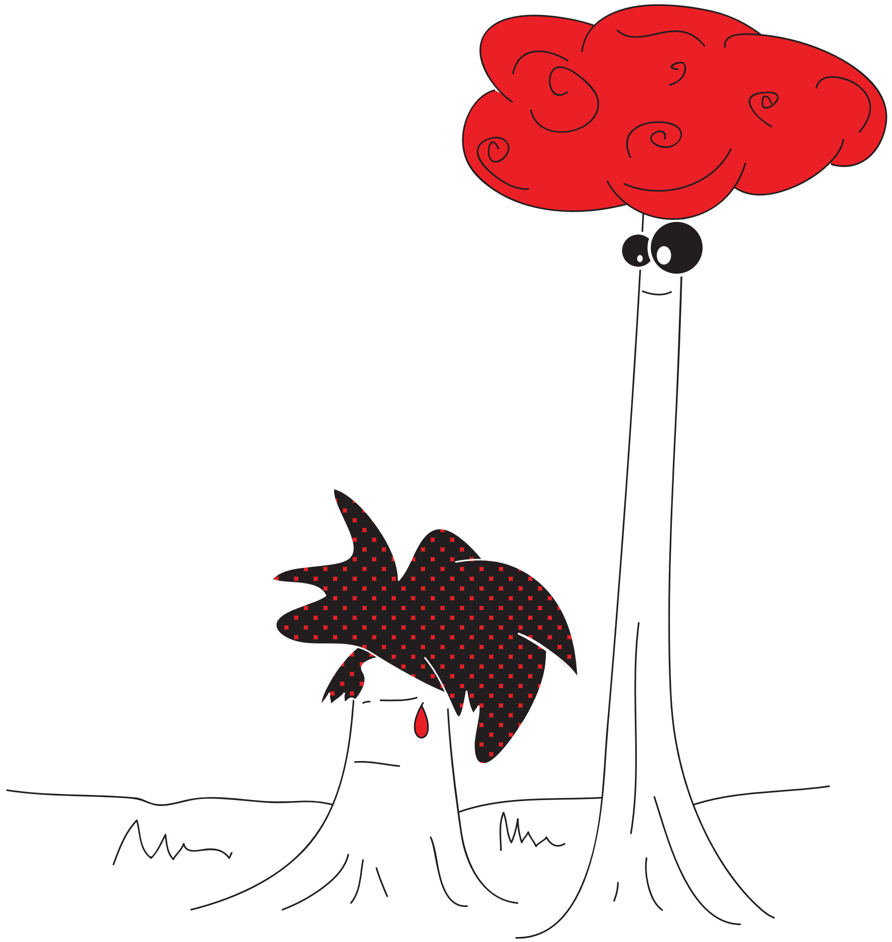
Matemática Multimídia

# Introdução

A preocupação em medir distâncias acompanha o homem desde os tempos mais remotos: o trabalho dos cartógrafos em descobrir a extensão do planeta, os limites dos países, as suas distâncias até o mar etc. Distâncias pequenas são mais simples de se calcular, mas quando se deseja medir distâncias inacessíveis, como a largura de um rio ou a altura de um prédio, por exemplo, utilizamos instrumentos denominados *teodolitos*.

Nesta atividade, os alunos poderão medir a altura de uma árvore utlizando um tipo de teodolito construído com um transferidor, um canudinho e um fio de prumo. Este aparelho só medirá ângulos na vertical.

Inicialmente faremos um estudo com triângulos retângulos para definir o que é a tangente de um ângulo e, assim, utilizar o nosso medidor de ângulos para medir alturas inacessíveis.



# O Experimento

## Material necessário

- Papel cartão;
- Régua;
- Transferidor;
- Tesoura;
- Calculadora (*com a calculadora científica é possível eliminar uma passagem da atividade*);
- Canudo;
- Fita adesiva;
- Peso (*para o fio de prumo*);
- Linha de costura (*ou barbante*);
- Fita métrica (*o ideal é uma trena*).

**FIG. 1**

# Preparação

Os alunos devem formar grupos de três componentes pois os procedimentos das etapas finais são mais bem executados com a participação de três pessoas.

A Etapa 1 será uma apresentação da definição de tangente. Os alunos devem permanecer dentro da classe, pois precisarão recortar papéis, medir e anotar valores.

A Etapa 2 será a construção do aparelho para ser usado na etapa seguinte.

Na Etapa 3 será feita a medição de uma árvore ou qualquer outra coisa alta e, provavelmente, os alunos ficarão em um ambiente descoberto.

# Seção especial

**O que é tangente de um ângulo?**
Antes de construir um medidor de ângulos, vamos apresentar uma atividade para desenvolver a noção de tangente de um ângulo e familiarizar os alunos com o uso do transferidor. Se seus alunos não apresentarem problemas sobre esse conceito, esta seção é desnecessária. Vá direto para a Etapa 1.

Professor, distribua pedaços de papel cartão para os grupos construírem triângulos retângulos de acordo com a sua indicação. Isto é, cada trio fará o recorte de triângulos com os ângulos determinados.

Algumas sugestões são:

- 90°, 30° e 60°;
- 90°, 45° e 45°;
- 90°, 20° e 70°;
- 90°, 40° e 50°.

Os grupos verificarão as tangentes apenas dos ângulos de seus respectivos triângulos, por isso, pode ser interessante que duas equipes recebam valores iguais. Assim, triângulos distintos, construídos por pessoas distintas, resultarão em tangentes iguais, enfatizando o que queremos mostrar.

Cada grupo deve recortar no mínimo três triângulos com medidas de lados diferentes e com os valores de ângulos dados.

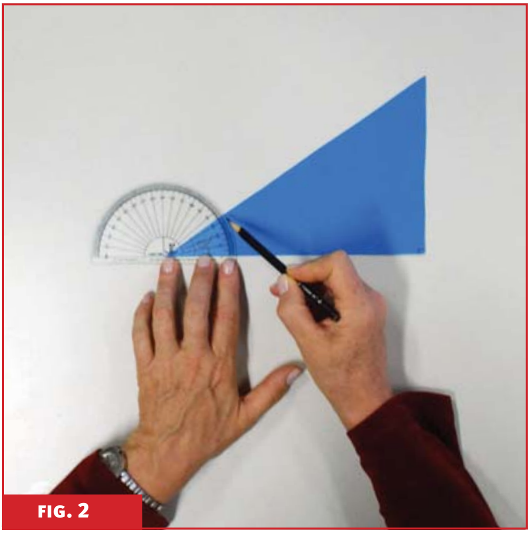


FIG. 2

* *Se desejar, use este mesmo método para iniciar o estudo de senos e cossenos.*

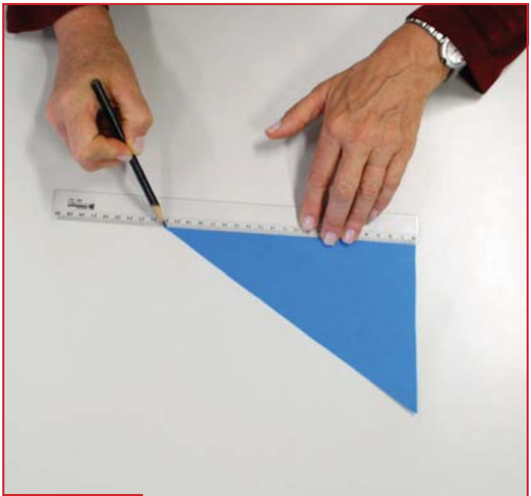


FIG. 3

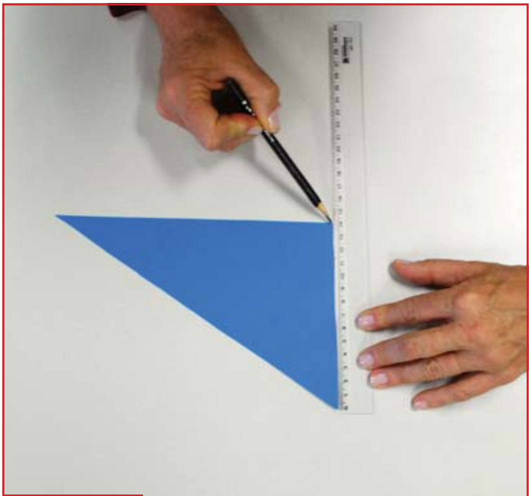


FIG. 4

Depois de conferir os ângulos e medir os catetos, como nas FIGURAS 2, 3 e 4, os alunos devem anotar os valores na tabela, por exemplo:

! *Fique atento para que os alunos não confundam os catetos: o oposto e o adjacente ficam invertidos quando trocamos o ângulo.*

| Triângulo | Ângulo de 20° | | Ângulo de 70° | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Cateto oposto | 8,2 cm | Cateto oposto | 12 cm |
| | Cateto adjacente | 12 cm | Cateto adjacente | 8,2 cm |
| | Razão: $\frac{\text{cat op}}{\text{cat adj}}$ | 0,68 | Razão: $\frac{\text{cat op}}{\text{cat adj}}$ | 1,46 |
| 2 | Cateto oposto | 14,2 cm | Cateto oposto | 21 cm |
| | Cateto adjacente | 21 cm | Cateto adjacente | 14,2 cm |
| | Razão: $\frac{\text{cat op}}{\text{cat adj}}$ | 0,68 | Razão: $\frac{\text{cat op}}{\text{cat adj}}$ | 1,47 |
| 3 | Cateto oposto | 20 cm | Cateto oposto | 29,8 cm |
| | Cateto adjacente | 29,8 cm | Cateto adjacente | 20 cm |
| | Razão: $\frac{\text{cat op}}{\text{cat adj}}$ | 0,67 | Razão: $\frac{\text{cat op}}{\text{cat adj}}$ | 1,49 |

**TABELA 1** *Tabela para ser reproduzida no caderno, este é um exemplo para o professor.*

Depois que todos os grupos terminarem, anote na lousa os valores das razões obtidas para cada ângulo, por exemplo, *Razão de 20° = 0,68*. Explique, então, que o nome dado a esta razão é tangente de 20°.

* *Discuta com a classe o fato de as medições sempre gerarem erros. Consequência disso são as pequenas variações nos valores obtidos para a tangente.*

# Tangente de qualquer ângulo

ETAPA 1

***Questão para os alunos***

Como é possível obter a tangente de qualquer ângulo agudo de um triângulo retângulo?

Esperamos que os alunos percebam que é factível construir um triângulo retângulo qualquer, medir os catetos e obter a tangente desejada.

A lousa da FIGURA 5 mostra que a tangente do ângulo $\alpha$ é 0,5 independentemente do tamanho do triângulo que construirmos com ele.

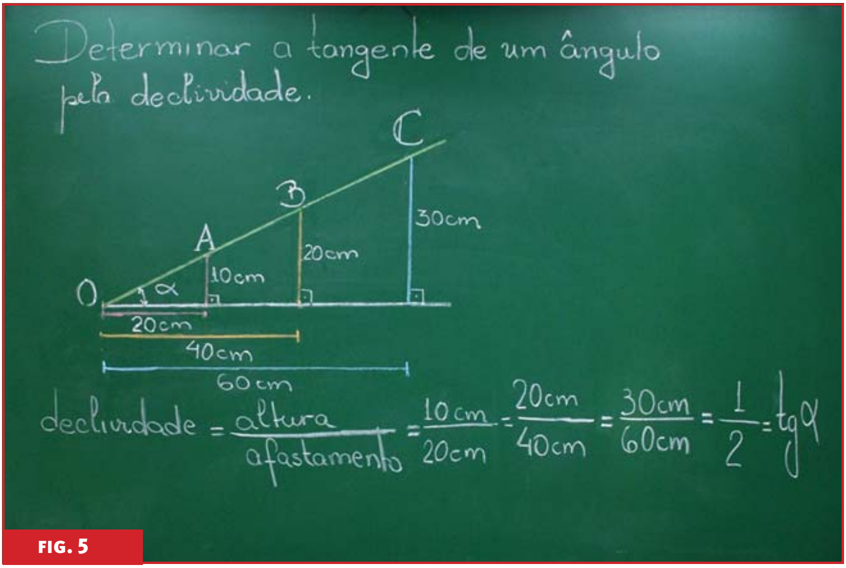
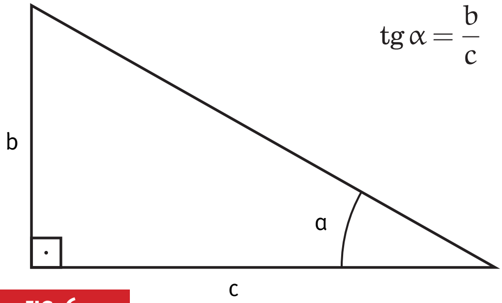



FIG. 5

Observamos que são semelhantes todos os triângulos retângulos com o mesmo ângulo agudo $\alpha$. Como consequência desta semelhança, obtemos a mesma razão entre as medidas dos catetos desses triângulos.

Assim, para um mesmo ângulo $\alpha$ de um triângulo retângulo, temos que a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a este ângulo $\alpha$ é definida como a tangente do ângulo $\alpha$.




$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c}$$

**FIG. 6**

## O medidor de ângulos

ETAPA
2

A construção deste instrumento é simples, mas todos os passos devem ser feitos com atenção. Além disso, as ilustrações contidas neste material não estão todas presentes na Folha do Aluno. Sendo assim, ande pela classe certificando-se de que os alunos o estão construindo corretamente.

1. Recorte um pedaço (20 cm × 10 cm) do papel cartão;
2. Fixe o transferidor neste pedaço de papel usando a fita transparente, destacando o segmento de reta que passa pela marca do ângulo de 90°, como na FIGURA 7;
3. Prenda o barbate com o peso e o canudo, como nas FIGURAS 8 e 9.

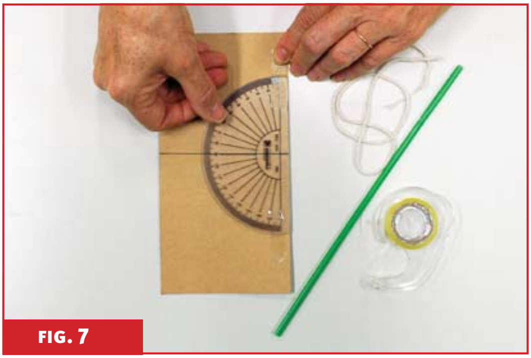


FIG. 7

! *O canudo deverá ser preso coincidindo com a linha-de-fé do transferidor.*

FIG. 8

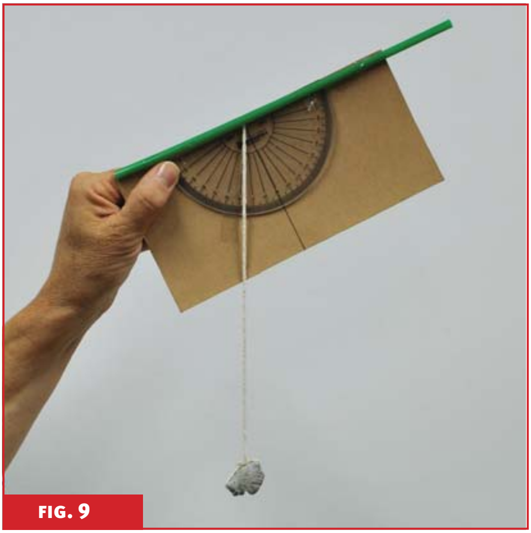


FIG. 9

# A altura da árvore

ETAPA
3

**FIG. 10**

Esta etapa final sugere que os alunos meçam a altura de algo inacessível. Leve-os a alguma praça ou procure objetos na escola cujas medidas são difíceis de se medir, como a altura do teto, da cobertura da quadra ou do segundo pavimento, por exemplo.

O uso do medidor de ângulos deve seguir algumas indicações:

1. Observar o topo da árvore através do canudo;
2. Pedir que um colega anote o menor valor indicado pelo barbante no transferidor;
3. Medir a distância do observador até o pé da árvore, como na FIGURA 11.

! *Professor! Escolher o mesmo objeto para ser medido por todos os alunos.*

* *Várias medidas garantem uma melhor aproximação do ângulo. Incentive seus alunos a fazerem muitas e utilizar a média aritmética delas.*

FIG. 11

*Observação*: A partir dos dados coletados, é possível determinar *o ângulo de visada* $\alpha$ e calcular a altura da arvore, conforme as figuras a seguir.

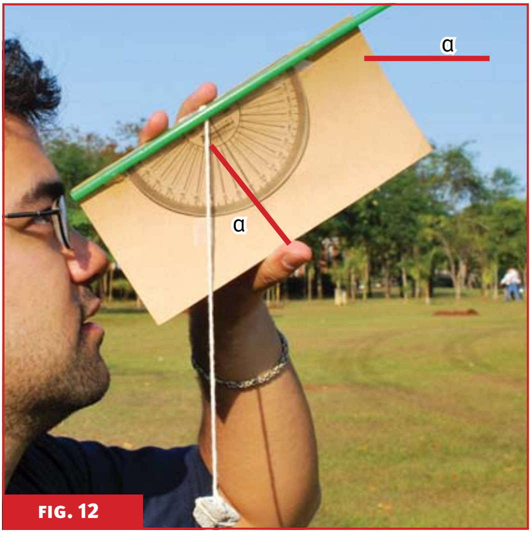



FIG. 12

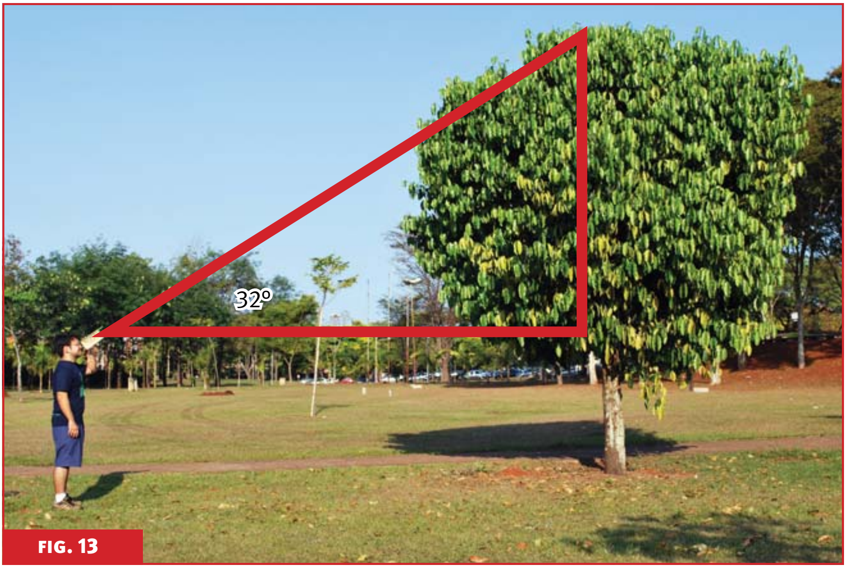



FIG. 13

# Fechamento

Com as medições anotadas, os alunos podem voltar para a classe e cada grupo deve calcular a altura da árvore.

É importante que os alunos observem os seguintes aspectos:

- os ângulos do triângulo retângulo que deve ser considerado para obter a medida procurada;
- a altura do aluno que realizou a medida;
- a razão trigonométrica adequada.

Sugerimos algumas questões para incentivar a discussão:

***Questão para os alunos***

**Qual triângulo?**
Qual é o triângulo que devemos usar para obter a altura que procuramos? Já conhecemos o valor de algum de seus ângulos?

**Qual ângulo?**
O ângulo de visada medido corresponde a qual ângulo do triângulo?

O esperado é que todos percebam as relações das medidas obtidas e desejadas, como no exemplo a seguir, em que o ângulo medido é 58°.

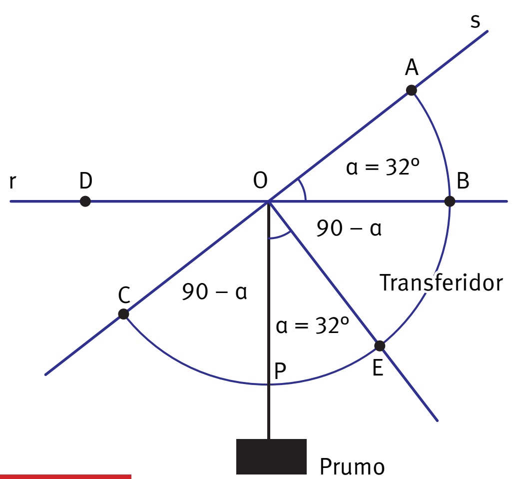



**FIG. 14**

* *Espere que os alunos realizem a atividade. Caso alguns não usem o ângulo correto, aproveite a oportunidade para justificar o uso do ângulo de 32°.*

A justificativa da utilização do ângulo de 32º como ângulo de visada é que:

- A reta $s$ passa pela linha-de-fé do transferidor;
- A reta $r$ faz um ângulo $\alpha$ com a reta s;
- Os ângulos $AOB$ e $COD$ são opostos pelo vértice e, portanto, congruentes;
- $OP$ corresponde ao fio de prumo e é perpendicular à reta $r$. Então, o ângulo $COP$ mede $90 - \alpha$;
- Como $OE$ é perpendicular à reta $s$, temos o ângulo $EOP$ medindo $\alpha$.

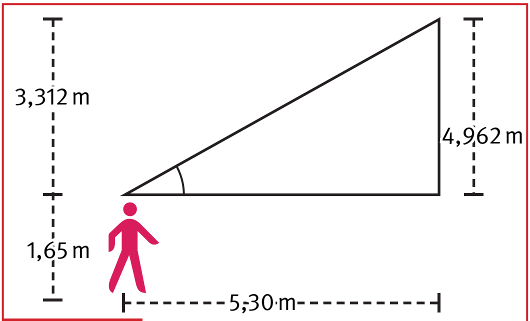



FIG. 15

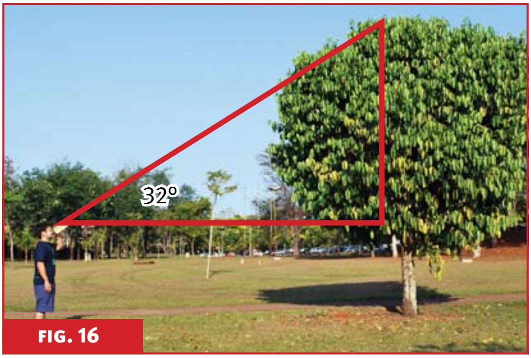



FIG. 16

Assim, como

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{altura}}{\text{distância}},$$

desenhando um triângulo retângulo qualquer e medindo os catetos (ou usando a calculadora científica), obtemos a tangente do ângulo de 32º.

Então, $\operatorname{tg}32^\circ = {}^{\text{altura}}/_{5,30}$. Como $\operatorname{tg}32^\circ \approx 0,625$, temos que a altura da cabeça do menino até o topo da árvore é igual a $0,625 \times 5,30 = 3,312\,\mathrm{m}$. E, portanto, a altura da árvore do exemplo é igual a $(1,65 + 3,312) = 4,962\,\mathrm{m}$.

Professor, use e abuse do instrumento que seus alunos construíram. Aproveite os passeios da escola para medir alturas de pontos turísticos, como igrejas e monumentos. Elabore tarefas para casa nas quais eles tenham que utilizar o medidor, por exemplo: "Qual é a altura da casa ou do prédio vizinho?".

# Ficha técnica

Matemática Multimídia

**Autores**
Maria Zoraide M. C. Soares,
Miriam Sampieri Santinho Rosa
Maria Machado e Wilson Roberto Rodrigues

**Coordenação de redação**
Leonardo Barichello

**Redação**
Rita Santos Guimarães

**Revisores**
**Matemática**
Antônio Carlos do Patrocínio
**Língua Portuguesa**
Carolina Bonturi
**Pedagogia**
Ângela Soligo

**Projeto gráfico e ilustrações técnicas**
Preface Design

**Ilustrador**
Lucas Ogasawara de Oliveira

**Fotógrafo**
Augusto Fidalgo Yamamoto

UNICAMP

**Universidade Estadual de Campinas**
**Reitor**
Fernando Ferreira Costa
**Vice-Reitor**
Edgar Salvadori de Decca
**Pró-Reitor de Pós-Graduação**
Euclides de Mesquita Neto

**Matemática Multimídia**
**Coordenador Geral**
Samuel Rocha de Oliveira
**Coordenador de Experimentos**
Leonardo Barichello

**Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)**
**Diretor**
Jayme Vaz Jr.
**Vice-Diretor**
Edmundo Capelas de Oliveira



FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL