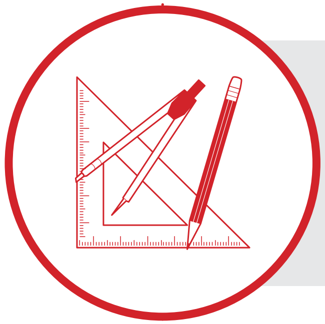
Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS



Guia do professor

Experimento

A altura da árvore

Objetivos da unidade

1. Desenvolver a habilidade para utilizar um transferidor;
2. Apresentar, experimentalmente, a noção de tangente de um ângulo;
3. Usar a noção de tangente para medir uma altura inacessível.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

A altura da árvore

Guia do professor

Sinopse

Experimentalmente os alunos serão expostos ao significado da tangente de um ângulo interno do triângulo retângulo. Esse novo conceito será usado para, depois de construir uma ferramenta capaz de medir ângulos verticais, encontrar a altura de objetos como antenas, árvores, prédios ou postes.

Conteúdos

- Trigonometria no triângulo retângulo, Função Tangente.

Objetivos

1. Desenvolver a habilidade para utilizar um transferidor;
2. Apresentar, experimentalmente, a noção de tangente de um ângulo;
3. Usar a noção de tangente para medir uma altura inacessível.

Duração

Uma aula dupla.

Matemática Multimídia

Introdução

A preocupação em medir distâncias acompanha o homem desde os tempos mais remotos: o trabalho dos cartógrafos em descobrir a extensão do planeta, os limites dos países, as suas distâncias até o mar etc. Distâncias pequenas são mais simples de se calcular, mas quando se deseja medir distâncias inacessíveis, como a largura de um rio ou a altura de um prédio, por exemplo, utilizamos instrumentos denominados *teodolitos*.

Nesta atividade, pretendemos medir a altura de uma árvore utilizando um instrumento rudimentar que denominaremos medidor de ângulos, construído com um transferidor, um canudinho para visor e um fio de prumo.

Seguiremos os seguintes passos no roteiro: no início, investigaremos experimentalmente a noção de tangente; em seguida, construiremos o medidor de ângulos para medir a altura de uma árvore.

Motivação

A idéia de medir alturas inacessíveis pode ser algo motivador para os alunos. O uso de instrumentos simples construídos pelos próprios alunos e o desenvolvimento de uma atividade ao ar livre são elementos que contribuem para que o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos pertinentes a esta atividade ocorram de maneira natural e significativa.

O experimento

Comentários iniciais

A PRIMEIRA ETAPA da atividade destina-se a dar subsídios para a construção do conceito de tangente de um ângulo. Deve ficar muito claro para o aluno, ao final da atividade, que a razão entre as medidas dos catetos de um triângulo retângulo depende apenas do ângulo em questão, e não das medidas dos lados do triângulo.

Nas etapas posteriores, esse conceito é aplicado numa situação prática.

Etapa 1 **Tangente de qualquer ângulo**

Com relação à definição de tangente de um ângulo, é importante deixar claro ao aluno que:

Dado um triângulo AOB, retângulo em B como na figura, podemos verificar que os triângulos AOB e XOY são semelhantes pelo caso AAA. Podemos afirmar ainda que, para quaisquer pontos X e Y pertencentes às semirretas OA e OB, respectivamente, com o segmento XY perpendicular à semi-reta OB, teremos as relações:

$$\frac{XY}{OY} = \frac{AB}{OB} = k$$

onde k é uma constante denominada tangente do ângulo de medida α.

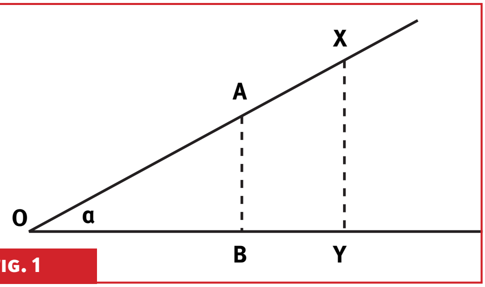


FIG. 1

Ampliações do conceito de tangente de um ângulo

Quando representamos o gráfico de uma reta r em um plano cartesiano, a partir das coordenadas de dois de seus pontos, obtemos a tangente do ângulo α definido pela reta e o eixo x. Assim se estabelece a seguinte relação:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$, denominada coeficiente angular da reta.

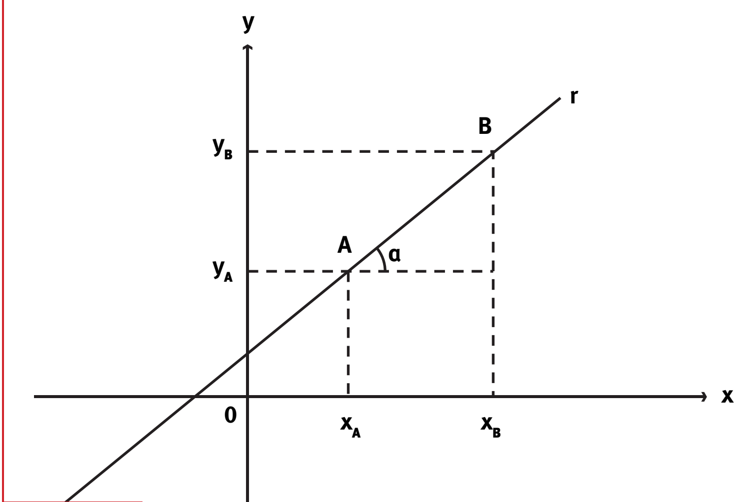


FIG. 2

Encontrar um ângulo a partir de sua tangente

Para resolver equações envolvendo a tangente, ou seja, para descobrir a medida de um ângulo do qual conhecemos a tangente, nós precisamos de uma função inversa da tangente. Por exemplo, suponhamos que queiramos resolver $\operatorname{tg} x = 0,8$, isto é, encontrar um arco x cuja tangente é 0,8.

Na calculadora, a tecla da função tangente é a tecla tan ou TAN (algumas vezes encontramos tg). A função arco tangente costuma aparecer na mesma tecla, precedida por "shift". Pode ser indicada acima da tecla por ATAN ou TAN^{-1}. É importante notar que o valor fornecido pela calculadora refere-se ao intervalo $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$. Observando o gráfico da função tangente, entretanto, vemos que existem vários ângulos cuja tangente é igual a 0,8.

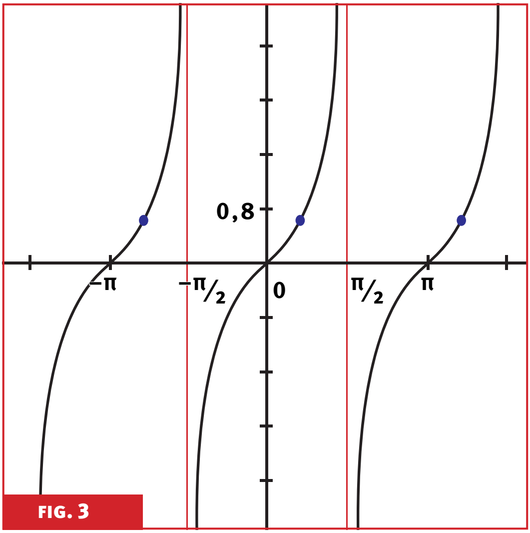


FIG. 3

A função arco tangente

Para definir a função arco tangente, é necessário escolher um intervalo onde exista apenas um ângulo cuja tangente seja igual a 0,8. Fazendo isso, escolhemos um intervalo no eixo x que produz todos os valores da função tangente uma única vez, o intervalo aberto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

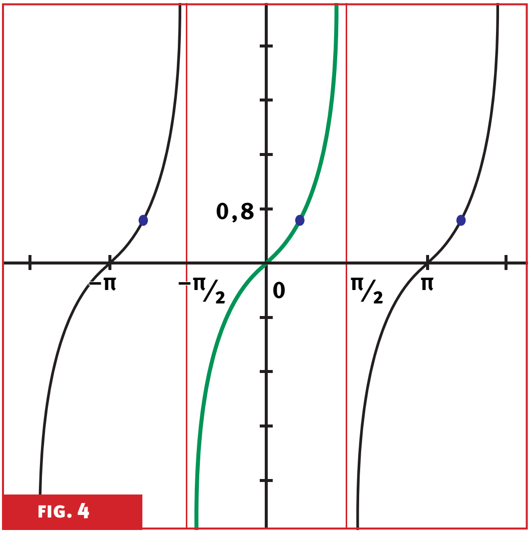


FIG. 4

Em verde, o gráfico de $y = \mathrm{tg}(x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

A função inversa da tangente, também chamada função arco tangente, é denotada por $\mathrm{tg}^{-1}(y)$ ou $\mathrm{arctg}\, y$ ou $\tan^{-1}(y)$ ou $\arctan y$.

Escrevemos $x = \mathrm{tg}^{-1}(y)$ se e somente se $y = \mathrm{tg}\, x$ e $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

O domínio da função inversa é $-\infty < y < \infty$ e seu contradomínio é $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

As calculadoras possuem a tecla TAN^{-1} para a função arco tangente. Por exemplo, digitando 1 e em seguida TAN^{-1} aparece no visor 45° ou 0,785398, que é $\pi/4$ radianos.

Verifique:

- $\mathrm{tg}^{-1}(0) = 0$;
- $\mathrm{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$;
- $\mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

No triângulo retângulo, o ângulo x fica restrito. Ele varia de zero a $\frac{\pi}{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Neste caso, a tangente assume valores de 0 até $+\infty$.

Etapa 2 **O “medidor de ângulos”**

Esta etapa consiste basicamente de atividades de recorte e colagem. Apesar de envolver procedimentos simples, deve ser dada atenção especial à necessidade de construir o aparelho com precisão e meticulosidade, uma vez que este é um momento importante para desenvolver habilidades motoras.

Etapa 3 **A altura da árvore**

O problema da medida da árvore é bastante simples. A atenção principal estará na obtenção do ângulo de visada a partir da leitura do medidor. Uma possível questão a ser colocada é se é possível construir um medidor de ângulos que forneça direto a medida do ângulo de visada, sem a necessidade do cálculo do complemento. Estimule os alunos a se envolverem com essa questão!

O problema pode ser resolvido se for construída uma escala invertida, como na figura abaixo.

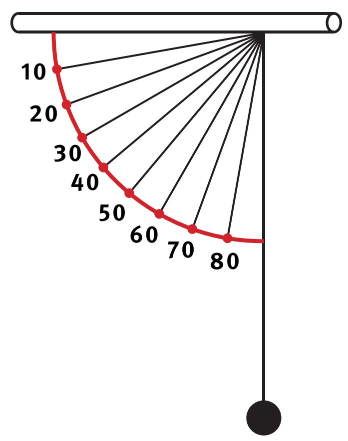


FIG. 5

Fechamento

Nas diversas etapas propostas deste experimento, o aluno é convidado se envolver com o experimento em diversos níveis. Neste sentido, há a possibilidade de se desenvolver uma atividade de ensino contextualizada, na qual o aluno poderá manifestar ou adquirir diferentes habilidades pessoais que poderão, ainda, ser compartilhadas com seus colegas e professores.

Destacamos a apresentação de uma questão histórica pertinente a este assunto e também a possibilidade de aumentar o número de maneiras de se construir um medidor de ângulos, como citado na etapa 3 deste guia. Embora o primeiro medidor possibilite uma discussão matemática mais abrangente, o professor poderá fazer sua opção de uso.

Variações

Um problema clássico da história da Matemática pode ser resolvido a partir da construção do quadrante, conforme ilustrado na figura abaixo.

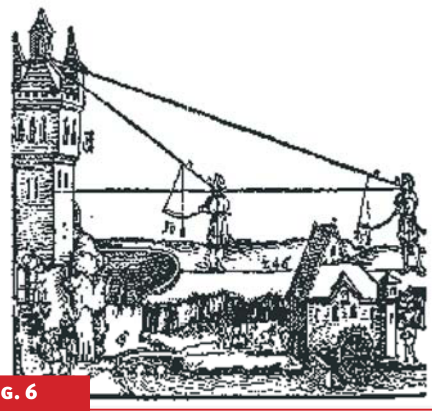


FIG. 6

Observando a figura, percebemos que o homem observava a torre numa situação inicial em que o ângulo marcado no quadrante era de 25°. Após caminhar 246 unidades em direção à torre, passou a observá-la segundo um ângulo de 50°. Partindo desses dados, como podemos determinar a altura da torre sem considerar a altura do homem?

Este problema precisa ser resolvido com auxílio de uma calculadora científica ou de uma tábua de razões trigonométricas. Podemos expressá-lo da seguinte maneira:

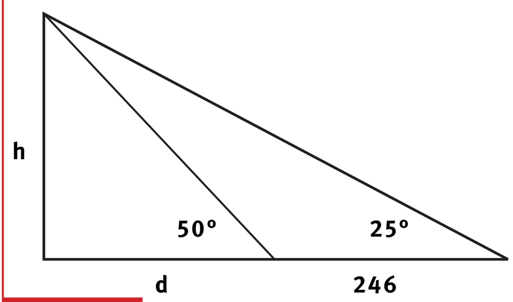


FIG. 7

Assim,

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{\operatorname{tg} 50^\circ} \text{ (I)}$$

$$\operatorname{tg} 25^\circ = \frac{h}{d+246} \Rightarrow d = \frac{h - 246 \cdot \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 25^\circ} \text{ (II)}$$

Igualando (I) e (II)

$$\frac{h - 246 \cdot \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 25^\circ} \Rightarrow h = \frac{246 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ}$$

sabendo que $\operatorname{tg} 50^\circ \approx 1{,}1918$ e que $\operatorname{tg} 25^\circ \approx 0{,}4663$

$$h = \frac{246 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ} \approx \frac{246 \cdot 1{,}1918 \cdot 0{,}4663}{1{,}1918 - 0{,}4663} \approx 188{,}43 \text{ unidades.}$$

Bibliografia

Carmo, Perdigão do Carmo; Morgado Augusto César; Wagner, Eduardo. **Trigonometria Números Complexos**. sbm, 1992.

Iezzi, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar 32: trigonometria**. 7ª ed, São Paulo: Atual, 1993.

Lima, Elon Lages Lima; Carvalho, Paulo C P; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. **Temas e Problemas**. sbm, 2003

Lima, Elon Lages Lima; Carvalho, Paulo C P; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. **Temas e Problemas Elementares**. sbm, 2005.

Queiroz, Maria Lucia B.; Rezende, Eliane Q.F. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. Campinas, SP: Editora da Unicamp;São Paulo, SP: Imprensa Oficial, 2000.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

AUTORES
Maria Zoraide M. C. Soares,
Miriam Sampieri Santinho,
Rosa Maria Machado e
Wilson Roberto Rodrigues.

REVISORES
Matemática
Antônio Carlos do Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

PROJETO GRÁFICO E ILUSTRAÇÕES TÉCNICAS
Preface Design

FOTÓGRAFO
Augusto Fidalgo Yamamoto

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL