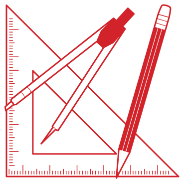
Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS

GUIA DO PROFESSOR



Experimento

Montanhas geométricas

Objetivos da unidade

1. Elaborar, verificar e reformular hipóteses sobre um fenômeno observado;
2. Aplicar conceitos básicos de gometria plana e espacial.

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Montanhas geométricas

Guia do professor

Sinopse

Nesta atividade o aluno construirá diversos polígonos usando papelão e areia. O objetivo é construir o que chamaremos de "Montanhas Geométricas". Esses polígonos possuem diversos traços peculiares, que são, na verdade, o conjunto de pontos que são centros de circunferências que tangenciam, ao menos, dois lados. A proposta é que, sem conhecerem esse resultado, os alunos construam hipóteses sobre a formação de areia. Por fim, o professor deverá discutir as hipóteses criadas pelos alunos buscando formalizá-las, utilizando para isso o conhecimento prévio que eles possuem.

Conteúdos

- Geometria Plana, Semelhança de Triângulos;
- Geometria Analítica, Distâncias.

Objetivos

1. Elaborar, verificar e reformular hipóteses sobre um fenômeno observado;
2. Aplicar conceitos básicos de gometria plana e espacial.

Duração

Uma aula simples.

Introdução

Toda (ou quase toda) criança já brincou de construir montes e castelos de areia. Dessa maneira, será raro encontrar alguém que não conheça nosso objeto de estudo. Apesar de sua notoriedade, o olhar matemático funciona como uma lente de aumento capaz de revelar aspectos que se mantém invisíveis na brincadeira.

Neste experimento, vamos explorar algumas características geométricas de montanhas formadas pelo depósito de areia sobre superfícies no formato de certos polígonos. Mais especificamente, vamos compreender qual é a relação entre o formato adquirido pela montanha e o polígono que serviu de base para ela.

Motivação

Este experimento possui um componente lúdico evidente, em função da manipulação da areia para obtenção das montanhas, que serão os objetos de análise dos alunos.

Em termos de conteúdo, o experimento proporciona um contexto no qual conceitos básicos de Geometria Espacial se relacionam com conceitos e propriedades de Geometria Plana de maneira bastante natural.

Por fim, extrapolando um pouco o contexto colocado explicitamente no experimento, podemos aplicar o conteúdo explorado e as conclusões obtidas a outros contextos, como, por exemplo: deslizamento de terras, avalanches, trajetória de um líquido em terrenos inclinados etc.

O experimento

Comentários iniciais

Costumamos definir a bissetriz de um ângulo como sendo a reta que divide o ângulo em dois ângulos congruentes. Se considerarmos um ângulo como a região compreendida entre duas semirretas l e m com origem em um ponto comum A, então a semirreta bissetriz é a semirreta n contida no ângulo que o divide em dois ângulos congruentes.

Essa semirreta n pode ser caracterizada de outro modo, que será explorado neste experimento: n é o conjunto de todos os pontos contidos no ângulo e que estão a mesma distância de l e de m (ditos equidistantes).

Na FIGURA 1, podemos constatar que os triângulos ANL e ANM são congruentes, pois os ângulos NAL e MAL são congruentes por construção, NA é um lado comum e o ângulo oposto a este lado é, por construção, um ângulo reto em ambos os triângulos.

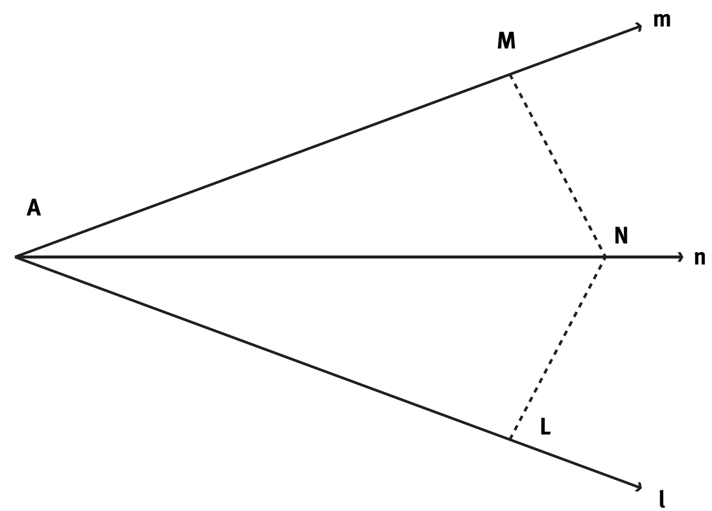


FIG. 1

Usaremos esta propriedade para definir o que chamamos de bissetriz entre duas retas paralelas:

Definição

Dadas retas paralelas l e m, sua bissetriz é o conjunto dos pontos equidistantes entre as duas retas.

Não é difícil verificar que a bissetriz de duas retas paralelas l e m é uma reta n, paralela a ambas e passando pelo ponto médio de algum segmento ligando l e m.

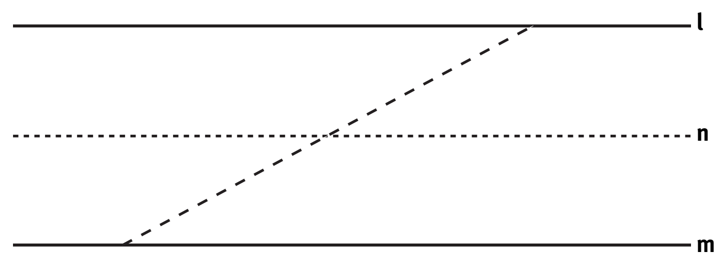


FIG. 2

A propriedade de equidistância da bissetriz, seja no caso de retas concorrentes ou paralelas, pode ser demonstrada utilizando resultados elementares de congruência de triângulos ou então usando geometria analítica, de acordo com a conhecida fórmula para a distância entre um ponto e uma reta:

Distância de ponto a reta

Se l é uma reta definida pela equação $ax + by + c = 0$ e P um ponto de coordenadas (x_0, y_0), então a distância de P a l é dada por

$$\frac{ax_o + by_o + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Talvez o modo mais simples seja utilizar ambos os tipos de argumentos: congruência de triângulos para mostrar que a bissetriz satisfaz à condição de equidistância e geometria analítica para mostrar que pontos não pertencentes a bissetriz não satisfazem esta condição.

Etapa 1 **Preparação do material**

Repare que todas as figuras que pedimos para ser recortadas são não apenas polígonos, mas polígonos convexos. Usar polígonos convexos garante, conforme veremos mais adiante, que as divisões de plano que surgirão ao se despejar areia serão segmentos de reta, sendo cada um deles pedaço de alguma bissetriz entre retas definidas pelos lados do polígono.

Definição

Um subconjunto X do plano é dito convexo se o segmento de reta ligando dois pontos quaisquer de X estiver contido em X.

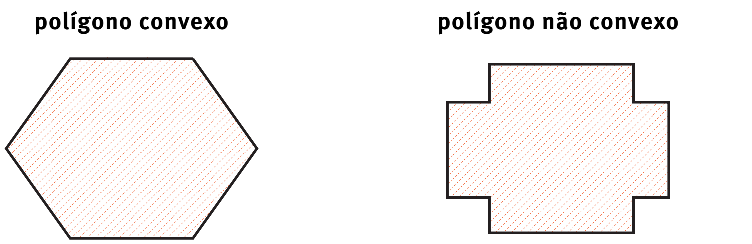


FIG. 3

Etapa 2 **Montanhas de areia**

Para ajudar seus alunos a perceber os padrões que se formam é importante que eles desenhem estas linhas formadas pelas mudanças de plano no papel que usaram de molde para recortar o papelão. Chame a atenção para observarem o monte de areia do alto, a uma certa distância, para que o desenho seja realmente próximo da projeção ortogonal destas linhas sobre o papelão.

Olhando os desenhos formados para os três primeiros polígonos, quadrado, retângulo e triângulo, as observações principais devem incluir os seguintes pontos:

1. O desenho é formado por segmentos de reta;
2. Existem pontos onde mais de dois segmentos distintos se encontram (vamos chamá-los de pontos de bifurcação);
3. As linhas de mudança de plano têm as mesmas simetrias que o polígono em questão;
4. Cada segmento de reta é um pedaço de alguma bissetriz entre pares de lados do polígono;
5. Nem todas as bissetrizes entre pares de lados contribuem para a formação da curva de separação de planos.

O ponto mais crítico e difícil de ser notado é o fato de cada segmento ser um pedaço de bissetriz. Para auxiliar os alunos a perceber este fato, copie o desenho em algum outro papel usando papel carbono ou em pedaço de papel vegetal, papel manteiga ou mesmo um pedaço de transparência. Recorte um pedaço desta cópia envolvendo um único vértice (de forma a obter um triângulo).

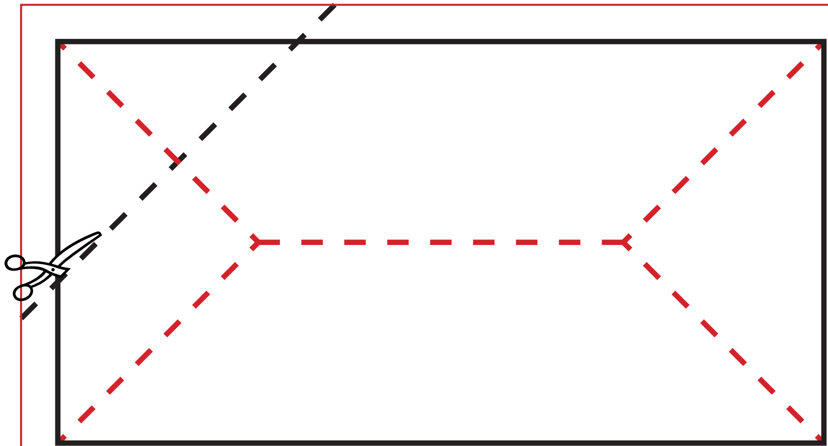


FIG. 4

Dobrando o recorte sobre a bissetriz, os alunos poderão constatar que as linhas tracejadas são de fato bissetrizes de pares de lados do polígono.

Fechamento

É possível verificar experimentalmente que cada ponto da espinha do polígono é centro de uma circunferência que tangencia o polígono em ao menos dois lados. Construa com uma tira de papel cartão com três ou quatro centímetros de altura o contorno do polígono, formando uma espécie de moldura. Depois, recorte, por exemplo, uma tira de plástico (usado como capa em encadernações feitas com espirais) com a mesma altura. A tira deve ser comprida o suficiente para fazer um círculo com 4 ou 5 voltas, aproximadamente do tamanho do polígono. Este material é bastante flexível, o que faz com que, ao enrolá-lo e prender uma das pontas na moldura do polígono usando um clipe de papel comum, se expanda até que forme um círculo que tangencia a moldura em outro ponto (5 e 6.)

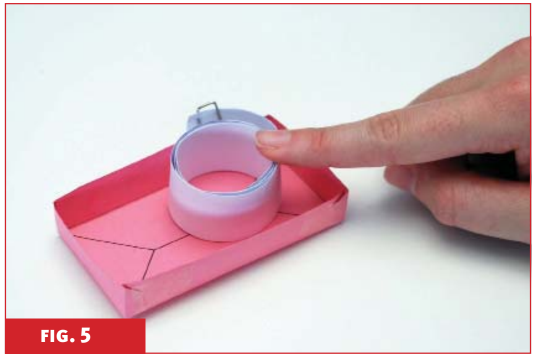


FIG. 5

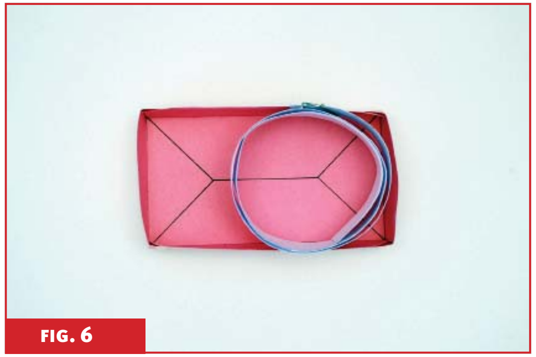


FIG. 6

Desenhando esta circunferência no molde de papel e traçando dois diâmetros, é possível constatar que o centro do círculo pertence à espinha (7).

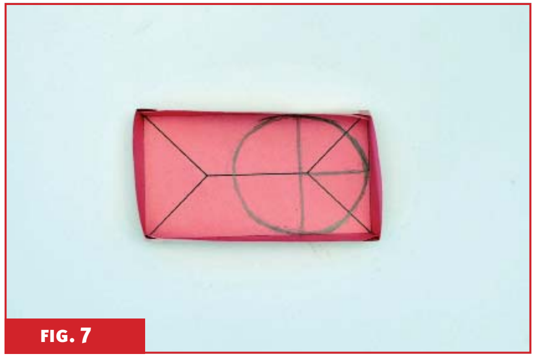


FIG. 7

Também é possível, usando a mesma tira de plástico, encontrar a maior circunferência inscrita no polígono: enrole a tira e, coloque-a dentro da moldura poligonal e deixe que ela se expanda. Se necessário, caso perceba que a circunferência "enroscou" na moldura, movimente-a com delicadeza para que possa continuar se expandindo. Novamente, traçando dois diâmetros, é possível encontrar o centro da circunferência e observar que este centro ou é um ponto de bifurcação da espinha ou um ponto de uma bissetriz de dois lados paralelos.

Observação

Repare que para um círculo maximal inscrito no polígono, qualquer arco de ao menos $180°$ contém um ponto do polígono. Se o centro do polígono for ponto de uma bissetriz de lados paralelos, estes lados interceptam o círculo em pontos diametralmente opostos, ou seja, dois pontos que determinam um diâmetro.

Variações

Se fizermos o mesmo experimento com polígonos não convexos, a espinha do polígono será constituída não apenas por segmentos de reta (pedaços das bissetrizes de lados do polígono), mas também pedaços de parábola, pois a parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes entre uma reta e um ponto. Estes segmentos de parábola surgirão relacionados a vértices com ângulo maior que um ângulo reto, exatamente os vértices perto dos quais o polígono deixa de ser convexo.

É possível também realizar o experimento com formas arbitrárias, não necessariamente poligonais, e também neste caso teremos uma espinha definida como lugar geométrico de pedaços do bordo da figura. Porém, neste caso genérico, não temos como caracterizar estas curvas de um modo mais interessante. Um caso particular simples e interessante é o do círculo: a montanha de areia forma um cone, com um único cume e no qual cada geratriz é na realidade um eixo de mudança de planos, ou seja, é um caso degenerado em que toda a superfície pode ser considerada como a espinha da figura.

Bibliografia

COLLI, Eduardo; SALLUM, Élvia M. **A Matemática das montanhas de areia**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo, v. 62, p. 39-44, 2007.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Marcelo Firer

Revisores
Matemática
Antonio Carlos do Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Fotógrafo
Augusto Fidalgo Yamamoto

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL