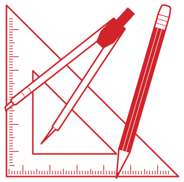
Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

GUIA DO PROFESSOR



Experimento

Quadrado mágico multiplicativo

Objetivos da unidade

1. Conhecer um desafio de lógica: Quadrado Mágico Multiplicativo;
2. Estudar PGs com o auxílio de quadrados mágicos multiplicativos.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Quadrado mágico multiplicativo

Guia do professor

Sinopse

Este experimento trata do tema de Progressão Geométrica utilizando quadrados mágicos multiplicativos. Inicia-se com um simples quadrado mágico multiplicativo, passando por termos centrais e constantes mágicas. Também será feito um estudo teórico de PGs, em que serão analisados termos centrais de PG, temos simétricos e soma de termos.

Conteúdos

- Sequência, Progressão Geométrica;
- Conjuntos, Lógica e Números.

Objetivos

1. Conhecer um desafio de lógica: Quadrado Mágico Multiplicativo;
2. Estudar PGs com o auxílio de quadrados mágicos multiplicativos.

Duração

Uma aula dupla.

Material relacionado

- Experimento: Quadrado Mágico Aditivo;
- Áudio: Pensando em Progressão Geométrica;
- Software: Crescimento Populacional.

Introdução

Quadrados Mágicos são muito conhecidos por qualquer pessoa que já tenha se interessado por matemática recreativa.

As primeiras menções a eles remetem há 3 mil anos antes de Cristo, na China, mas ainda hoje eles continuam intrigando curiosos e matemáticos profissionais. Martin Gardner, por exemplo, ofereceu um prêmio a quem encontrar um quadrado mágico de ordem 3 composto apenas por números inteiros que são quadrados perfeitos.

Na **Revista do Professor de Matemática**, eles já foram citados diversas vezes. Particularmente, recomendo os textos publicados nos volumes 41 e 59. Ambos, através de abordagens diferentes, concluem que o quadrado mágico de ordem 3 formado pelos números de 1 a 9 admite essencialmente uma única solução, sendo as demais obtidas através de simetrias da primeira.

8	1	6
3	5	7
8	9	2

FIG. 1

O quadrado acima é justamente uma dessas soluções e é conhecido como quadrado de Loh-Shu. No Experimento, esse quadrado mágico é chamado de quadrado mágico fundamental.

Motivação

Neste experimento, abordaremos os quadrados mágicos multiplicativos de ordem 3, ou seja, os quadrados de ordem 3 cuja multiplicação dos termos de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é igual.

Com isso, os estudantes poderão chegar até o conteúdo Progressões Geométricas e, se o professor quiser apresentar toda a discussão proposta neste guia, ir até o caso mais geral de soluções para esse tipo de quadrado mágico.

O experimento

Comentários iniciais

Esse experimento é totalmente análogo em termos de metodologia e de conteúdo ao experimento Quadrados Mágicos Aditivos. Por causa disso, este guia será bastante sucinto, trazendo apenas os resultados principais que estão demonstrados no guia do outro experimento.

Analogia entre quadrados mágicos aditivos e multiplicativos
Para entender essa analogia, vamos analisar um quadrado multiplicativo genérico:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

FIG. 2

Cada um desses números pode ser decomposto como um produto de potências de números primos, por exemplo, $a = a_1^{i_1} \times a_2^{i_2} \times \ldots \times a_n^{i_n}$, com i_n diferente de zero.

Queremos demonstrar que todos os nove elementos de um quadrado mágico multiplicativo possuem os mesmos fatores primos, variando apenas a potência de cada um deles.

Por absurdo, vamos supor, sem perda de generalidade, que o fator primo a_1 de a não ocorre em nenhum outro dos oito termos do quadrado. Mas, como $a \cdot b \cdot c = d \cdot e \cdot f$, a multiplicação $d \cdot e \cdot f$ possui o fator primo a_1, portanto, ou d ou e ou f possui o termo a_1, o que contradiz a nossa hipótese.

Logo, todos os nove termos que compõe um quadrado mágico multiplicativo de ordem 3 possuem os mesmos fatores primos (isso inclui a existência de algum fator com potência 0). A consequência disso é que as “multiplicações mágicas” também serão compostas por esses mesmos fatores e basta analisar as potências deles em cada uma das multiplicações. Por exemplo, se os termos são compostos por 3 fatores primos p, q e r, podemos escrever o candidato a quadrado mágico multiplicativo da seguinte maneira:

$p^{a_1} \cdot q^{a_2} \cdot r^{a_3}$	$p^{b_1} \cdot q^{b_2} \cdot r^{b_3}$	$p^{c_1} \cdot q^{c_2} \cdot r^{c_3}$
$p^{d_1} \cdot q^{d_2} \cdot r^{d_3}$	$p^{e_1} \cdot q^{e_2} \cdot r^{e_3}$	$p^{f_1} \cdot q^{f_2} \cdot r^{f_3}$
$p^{g_1} \cdot q^{g_2} \cdot r^{g_3}$	$p^{h_1} \cdot q^{h_2} \cdot r^{h_3}$	$p^{i_1} \cdot q^{i_2} \cdot r^{i_3}$

FIG. 3

Para verificar se se trata de um quadrado mágico, teríamos que verificar, por exemplo, se

$$(p^{a_1} \cdot q^{a_2} \cdot r^{a_3}) \cdot (p^{b_1} \cdot q^{b_2} \cdot r^{b_3}) \cdot (p^{c_1} \cdot q^{c_2} \cdot r^{c_3}) =$$
$$= (p^{d_1} \cdot q^{d_2} \cdot r^{d_3}) \cdot (p^{e_1} \cdot q^{e_2} \cdot r^{e_3}) \cdot (p^{f_1} \cdot q^{f_2} \cdot r^{f_3})$$

$$p^{(a_1+b_1+c_1)} \cdot q^{(a_2+b_2+c_2)} \cdot r^{(a_3+b_3+c_3)} =$$
$$= p^{(d_1+e_1+f_1)} \cdot q^{(d_2+e_2+f_2)} \cdot r^{(d_3+e_3+t_3)}$$

Como p, q e r são primos, extraímos dessa última igualdade a necessidade de igualdade entre as potências de cada um dos fatores:

$$a_1 + b_1 + c_1 = d_1 + e_1 + f_1$$
$$a_2 + b_2 + c_2 = d_2 + e_2 + f_2$$
$$a_3 + b_3 + c_3 = d_3 + e_3 + f_3$$

Isso reduz o problema de encontrar soluções para um quadrado mágico multiplicativo ao problema de encontrar soluções para essas somas. E isso, em essência, é análogo a encontrar soluções para quadrados mágicos convencionais, ou seja, aditivos.

Grosso modo, podemos enunciar a relação entre esses dois problemas da seguinte maneira:

Um quadrado de ordem 3 é um quadrado mágico multiplicativo apenas se as potências de cada um dos fatores primos de seus nove elementos formarem quadrados mágicos aditivos entre si.

Por exemplo, vamos verificar se o quadrado multiplicativo a seguir é mágico:

186624	6	419904
17496	7776	3456
144	10077696	324

FIG. 4

Escrevendo cada um dos elementos na forma fatorada, temos:

$2^8 3^6$	$2^1 3^1$	$2^6 3^8$
$2^3 3^7$	$2^5 3^5$	$2^7 3^3$
$2^4 3^2$	$2^9 3^9$	$2^2 3^4$

FIG. 5

Veja o que acontece se olharmos o quadrado formado pelas potências de 2 e o formado pelas potências de 3:

6	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

FIG. 6

Note que ambos formam quadrados mágicos aditivos, que são, inclusive, diferentes, e isso vale para qualquer quadrado mágico multiplicativo. Em função disso, apresentaremos neste guia apenas o enunciado dos resultados obtidos para os quadrados mágicos aditivos, que está disponível no Guia do professor desse outro experimento, caso deseje consultar.

Etapa 1 Quadrado mágico multiplicativo e PG

Nesta etapa, os alunos terão que montar quadrados mágicos multiplicativos com três sequências de nove números diferentes. São elas:

$$(1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256),$$

$$(3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192,\ 384,\ 768)$$

$$\text{e } (100,\ 50,\ 25,\ 25/2,\ 25/4,\ 25/8,\ 25/16,\ 25/32,\ 25/64).$$

Note que primeira envolve apenas potências de 2, a segunda potências de 2 e uma potência “fixa” de 3 e a terceira envolve potências positivas e negativas de 2 e uma potência “fixa” de 5.

A seguir, o resultado que relaciona progressões aritméticas e quadrados mágicos aditivos:

Quadrados mágicos e Progressões aritméticas

Dada uma progressão aritmética de nove termos, se posicionarmos todos os seus termos a_i na posição que o número i ocupa no quadrado de Loh-Shu, o quadrado resultante também será mágico.

Se o resultado for aplicado às potências dos termos de um quadrado mágico multiplicativo, chegaremos ao seguinte resultado:

Quadrados mágicos multiplicativos e Progressões geométricas

Dada uma progressão geométrica de nove termos, se posicionarmos todos os seus termos a_i na posição que o número i ocupa no quadrado de Loh-Shu, o quadrado resultante também será mágico.

Etapa 2 **Termos centrais e constantes mágicas**

Esta etapa traz um método bastante simples para determinação do posicionamento dos termos de uma progressão geométrica qualquer de nove termos, de modo que se obtenha um quadrado mágico multiplicativo de ordem 3.

$1/8$	4	2
16	1	$1/16$
$1/2$	$1/4$	8

FIG. 7

Além disso, traz uma maneira simples de se obter a constante mágica. Basta notar que a multiplicação de todos os nove termos é igual à multiplicação das três linhas; portanto, é igual ao cubo da constante mágica.

Fechamento

O conteúdo necessário para concluir a proposta original já foi discutido no próprio experimento e os aprofundamentos possíveis estão disponíveis no Guia do Professor do experimento Quadrado Mágico Aditivo.

Contudo, a título de lembrança e fixação, vamos enunciar o resultado sobre a família mais geral de soluções para quadrados mágicos aditivos:

Qualquer sequência de nove termos que possa ser descrita da seguinte maneira:

$a_1, a_1+r, a_1+2r, a_1+k+3r, a_1+k+4r, a_1+k+5r, a_1+2k+6r, a_1+2k+7r$ e $a_1+2k+8r$

pode ser arranjada de modo a resultar em um quadrado mágico.

Esse resultado pode ser aplicado à potência de cada um dos fatores primos dos elementos de um quadrado mágico multiplicativo para produzir um resultado análogo para este tipo de quadrado mágico.

Variações

Os quadrados mágicos realmente fascinam matemáticos profissionais e amadores. Por exemplo, no portal *Mathworld* (vide Bibliografia), há um texto apresentando alguns quadrados mágicos que são aditivos e multiplicativos ao mesmo tempo!

A análise desses quadrados mágicos não é nada simples, mas pode servir de inspiração para uma provocação aos alunos após realizarem esta atividade.

Bibliografia

Andrade, Lenimar Nunes de. **Mais sobre Quadrados Mágicos**. Revista do Professor de Matemática, vol. 41.

Gonçalves, Alex Oleandro. **Quadrado Mágico 3 × 3: um novo olhar**. Revista do Professor de Matemática, vol. 59.

Ward III, James E. **Vector Spaces of Magic Squares**. Mathematics Magazine, Vol. 52, n. 2.

http://mathworld.wolfram.com/Addition-MultiplicationMagicSquare.html (acessado em 2 de julho de 2010.)

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Leonardo Barichello

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira da Costa
Vice-Reitor e Pró-Reitor de Pós-Graduação
Edgar Salvadori De Decca

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal