Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

O EXPERIMENTO

Experimento

Quadrado mágico multiplicativo

Objetivos da unidade

1. Conhecer um desafio de lógica: Quadrado Mágico Multiplicativo;
2. Estudar PGS com o auxílio de quadrados mágicos multiplicativos.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Quadrado mágico multiplicativo

O experimento

Sinopse

Este experimento trata do tema de Progressão Geométrica utilizando quadrados mágicos multiplicativos. Inicia-se com um simples quadrado mágico multiplicativo, passando por termos centrais e constantes mágicas. Também será feito um estudo teórico de PGs, em que serão analisados termos centrais de PG, temos simétricos e soma de termos.

Conteúdos

- Sequência, Progressão Geométrica;
- Conjuntos, Lógica e Números.

Objetivos

1. Conhecer um desafio de lógica: Quadrado Mágico Multiplicativo;
2. Estudar PGs com o auxílio de quadrados mágicos multiplicativos.

Duração

Uma aula dupla.

Material relacionado

- Experimento: Quadrado Mágico Aditivo;
- Áudio: Pensando em Progressão Geométrica;
- Software: Crescimento Populacional.

Matemática Multimídia

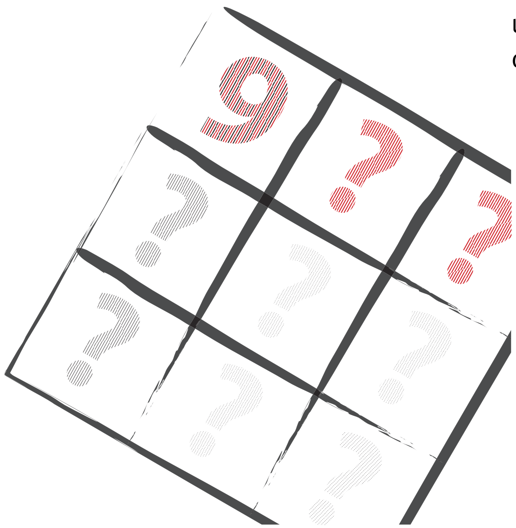
Introdução

Quadrado mágico, do ponto de vista da matemática recreativa, é considerado um tema fascinante. Ele permite múltiplas explorações e conexões com diversas áreas da matemática, desde decomposição numérica até análise combinatória.

Os quadrados mágicos são arranjos quadrados de numerais em que as linhas, colunas e diagonais têm a mesma soma. E este nome foi ganho por se acreditar que tivessem poderes especiais. Hoje em dia, há diversas variações, como o quadrado mágico multiplicativo, em que não mais a soma, mas sim a multiplicação de seus termos é que é constante.

Sua origem ainda é pouco conhecida hoje em dia, porém, a maior candidata de onde possa ter se originado seria a China. Afirma-se que os quadrados mágicos teriam surgido há cerca de 3000 anos.

O quadrado mágico com notação numérica moderna é atribuído ao imperador-engenheiro Yu, o Grande (2200 a.C.). Segundo a tradição, Yu estava observando o rio Amarelo, quando surgiu uma tartaruga divina, em cujo dorso estava o símbolo que hoje é conhecido pelo nome de lo shu. Assim, os chineses acreditavam que quem possuísse um quadrado mágico teria sorte e felicidade para toda a vida.



Os quadrados mágicos foram então se propagando, chegando ao Japão e Oriente Médio, e posteriormente a Europa, durante o século xv. Eles estavam relacionados com a alquimia e astrologia, e, quando gravados em placas de prata, eram usados como amuleto contra a peste. Contrapondo o misticismo, também foram seriamente estudados por matemáticos.

O estudo de quadrados mágicos e suas variações está longe de ser tedioso, além de ser um assunto de fácil abordagem e que desperta a curiosidade até mesmo daqueles que não são estudantes de matemática. Pode-se dizer, também, que mesmo usado como passatempo, acabou se tornando uma parte importante da matemática contemporânea.

O Experimento

Material necessário

- Folha de sulfite (*ou folha de caderno*).

Comentários iniciais

Quadrado mágico multiplicativo pode ser descrito por uma tabela quadrada de lado n. A sua principal característica é: a multiplicação dos termos de cada linha, coluna e diagonal é constante, e este valor é conhecido como constante mágica multiplicativa.

Preparação

Divida a sala em duplas e entregue uma Folha do Aluno.

Quadrado mágico multiplicativo e PG

ETAPA 1

Professor, inicie esta Etapa pedindo que os alunos construam um quadrado mágico multiplicativo 3×3, em que a multiplicação dos termos de cada linha, coluna e diagonal seja 4096, com os números: $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256)$. Abaixo, a resolução.

2	64	32
256	16	1
8	4	128

FIG. 1

Os alunos devem tentar resolver a proposta por um tempo determinado previamente. Poderá haver respostas diferentes, pois o quadrado mágico se conserva se rotacionarmos ou refletirmos seus números, mantendo o 16 no centro. Por exemplo:

8	256	2
4	16	64
128	1	32

FIG. 2 *Exemplo de rotação de 90º para a direita.*

8	4	128
256	16	1
2	64	32

FIG. 3 *Exemplo de reflexão em torno da linha horizontal 9, 5, 1.*

Terminada a introdução, proponha o seguinte problema:

Questão para os alunos

Monte quadrados mágicos multiplicativos com os seguintes números:

(3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768) e (100, 50, 25, 25/2, 25/4, 25/8, 25/16, 25/32, 25/64).

Os alunos devem montar mais dois quadrados mágicos com o conjunto de números dados, mas, neste caso, eles não terão a informação de qual será a constante mágica multiplicativa.

* *Caso os alunos tenham dificuldade em resolver os quadrados mágicos, as informações sobre as constantes mágicas e os termos centrais podem ser liberadas.*

Permita que os alunos tentem por um tempo, e sugira as seguintes questões:

Questão para os alunos

Quais são as constantes mágicas multiplicativas?

O que os três conjuntos de números dados têm em comum: (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256), (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768) e (100, 50, 25, $25/2$, $25/4$, $25/8$, $25/16$, $25/32$, $25/64$)?

Os alunos devem montar os quadrados mágicos multiplicativos, cujas constantes mágicas multiplicativas são $3^3 \cdot 2^{12}$ e $100^3 \cdot 1/2^{12}$.

A principal característica que os três conjuntos têm em comum é o fato de serem uma progressão geométrica (PG), com razões diferentes. No primeiro e segundo casos, a razão é dois, mas os primeiros termos são diferentes; e, no terceiro, a razão é $1/2$.

Se considerarmos os números, em ordem crescente, como termos de uma PG, poderemos observar que o segundo e o terceiro quadrados mágicos podem ser montados como o primeiro. Por exemplo, dada uma sequência de nove termos que formam uma PG,

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9),$$

o quadrado mágico preenchido por essa sequência sempre será:

a_2	a_7	a_6
a_9	a_5	a_1
a_4	a_3	a_8

FIG. 4

Assim, a solução para os quadrados mágicos são:

6	192	96
768	48	3
24	12	384

FIG. 5

50	25/16	25/8
25/64	25/4	100
25/2	25	25/32

FIG. 6

Relação entre quadrados mágicos aditivos e multiplicativos

Os conjuntos de números mostrados acima podem ser escritos genericamente como:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9),$$

Como esses números formam uma PG, podemos escrevê-los da seguinte maneira:

$$(a_1, ra_1, r^2a_1, r^3a_1, r^4a_1, r^5a_1, r^6a_1, r^7a_1, r^8a_1),$$

onde r representa a razão da PG e a_1 o primeiro termo.

Preenchendo o quadrado mágico multiplicativo, obtemos:

ra_1	r^6a_1	r^5a_1
r^8a_1	r^4a_1	a_1
r^3a_1	r^2a_1	r^7a_1

FIG. 7

Veja que a multiplicação de qualquer linha, coluna ou diagonal é igual a $a_1^3r^{12}$. Além disso, podemos observar que os valores das potências de r formam um quadrado mágico aditivo.

1	6	5
8	4	0
3	2	7

FIG. 8 *Quadrado formado pelas potências da razão de cada termo do quadrado anterior.*

Isso pode ser usado para montar uma quadrado mágico multiplicativo a partir de uma progressão geométrica qualquer. Mais detalhes sobre essa relação entre os quadrados mágicos aditivos e multiplicativos estão no GUIA DO PROFESSOR.

ra_1	r^6a_1	r^5a_1
r^8a_1	r^4a_1	a_1
r^3a_1	r^2a_1	r^7a_1

Quadrado mágico multiplicativo

$\longleftrightarrow$

1	6	5
8	4	0
3	2	7

Quadrado mágico aditivo

FIG. 9

Termos Centrais e Constantes Mágicas Multiplicativas

ETAPA
2

Inicie esta etapa questionando os alunos sobre o termo do centro dos quadrados mágicos multiplicativos:

Questão para os alunos

Dado o conjunto de números (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 e 1280), responda:

a. É possível utilizá-lo para preencher um Quadrado Mágico?

b. Se sim, qual será o termo central?

Resolvendo este quadrado mágico e observando os anteriores, os alunos descobrirão que dado um conjunto de números para completar um quadrado mágico, e formando estes uma PG, o termo central é o termo central da PG. Abaixo, o quadrado mágico multiplicativo resolvido:

10	320	160
1280	80	5
40	20	640

FIG. 10

Toda PG de nove termos preenche um quadrado mágico, mas nem toda solução do quadrado mágico precisa ser uma PG!

Abaixo, um exemplo de quadrado mágico cujos termos não formam uma PG:

18	1	12
4	6	9
3	36	2

FIG. 11

Esse caso de quadrado mágico é discutido mais detalhadamente no GUIA DO PROFESSOR.

Posições dos termos periféricos do Quadrado Mágico

Propomos, então, uma maneira de resolver essa questão. Sugira uma brincadeira para estimulá-los:

- Considere um dos quadrados mágicos resolvidos, como o primeiro (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256). Neste caso, o termo central já foi identificado: 16;
- Divida os termos por 16. Obterá, assim: $1/16$, $1/8$, $1/4$, $1/2$, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 16;
- Agora, o novo quadrado mágico multiplicativo formado por esses valores, deverá ter 1 como constante mágica:

1/8	4	2
16	1	1/16
1/2	1/4	8

FIG. 12

Podemos observar que todos os termos simétricos em relação a 1 são inversos multiplicativos:

1/8	4	2
16	1	1/16
1/2	1/4	8

FIG. 13

Assim, pensando numa PG, podemos dizer que o termo central do quadrado mágico multiplicativo será também o termo central da PG. E os valores simétricos serão os valores também simétricos da PG:

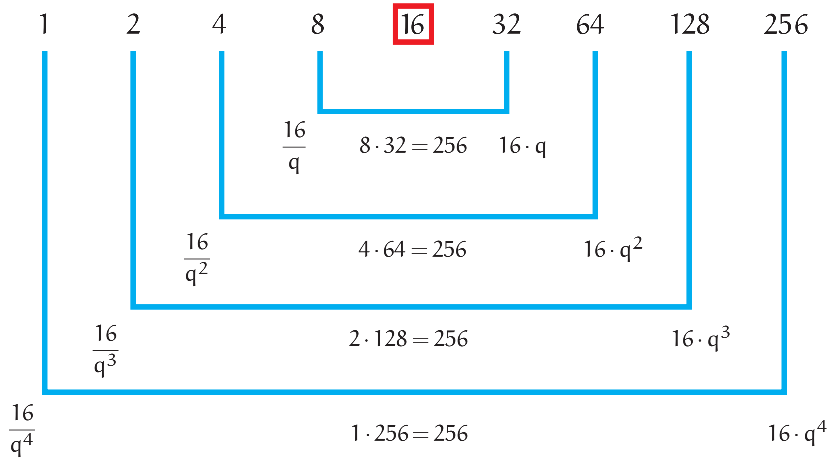


FIG. 14

Observação: $\sqrt{256} = 16$.

Constante mágica

Terminado o estudo relativo ao posicionamento dos termos, pode ser proposto um novo questionamento aos alunos:

Questão para os alunos

Dado um conjunto de números, como saber qual será a constante mágica?

A constante mágica será a raiz cúbica do produto de todos os números do quadrado mágico. Assim:

- $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256) \to \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128 \cdot 256} = 4096$
- $(3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768) \to 110592$
- $(100, 50, 25, 25/2, 25/4, 25/8, 25/16, 25/32, 25/64) \to 244,14$
- $(5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280) \to 512000$

Fechamento

Terminadas as etapas anteriores, os alunos deverão encontrar uma formulação mais geral para as soluções das questões propostas anteriormente.

Assim, dada uma PG geral de nove termos:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9,$$

os alunos devem se questionar novamente sobre os mesmos problemas das Etapas 1 e 2, e chegarem a uma nova resposta em função dos termos dessa PG.

Em relação ao termo central, este sempre será o a_5.

Questão para os alunos

Usando seus conhecimentos prévios, como encontrar a constante mágica?

Essa questão pode ser resolvida usando multiplicação de termos de uma PG:

$$P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Pensando numa PG de nove termos, que é o nosso caso, teremos:

$$\text{Constante mágica} = \sqrt[3]{P_n} = \sqrt[3]{a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Depois de realizadas todas as etapas anteriores, os alunos poderão ser capazes de desenvolver uma solução geral para o quadrado mágico multiplicativo completado com uma PG de nove termos.

Questão para os alunos

Dada uma PG de nove termos: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, monte um quadrado mágico multiplicativo.

Assim, os alunos terão uma solução geral que poderá ser utilizada para qualquer quadrado mágico multiplicativo de nove termos cujos valores formem uma PG.

a_2	a_7	a_6
a_9	a_5	a_1
a_4	a_3	a_8

FIG. 15

Desafios
A seguir, são propostos alguns desafios que podem ser usados a critério do professor no final do experimento.

Questão para os alunos

Construa um quadrado mágico cujo termo central seja 100.

Esta questão poderá ter inúmeras soluções, pois qualquer PG cujo termo central seja 100 será válida neste caso. Por exemplo:

$25/2$	400	200
800	100	$25/4$
50	25	600

FIG. 16

Este quadrado mágico foi preenchido com uma PG de razão 2, com termo central 100 e constante mágica igual a $\left(\frac{25}{4}\right)^3 \cdot 2^{12}$.

Questão para os alunos

Construa um quadrado mágico cujo termo central seja $\sqrt{2}$.

As observações feitas para a primeira questão também valem para esta. Assim, um exemplo de solução seria:

$\frac{1}{2}$	$2 \cdot \sqrt{2}$	2
$4 \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}$
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	4

FIG. 17

Esse quadrado mágico foi preenchido com uma PG de razão $\sqrt{2}$, com termo do meio $\sqrt{2}$ e constante mágica igual a

$$\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}\right)^3 (\sqrt{2})^{12}.$$

Usando os conhecimentos aprendidos até agora, complete o seguinte quadrado mágico:

		64
16		256

FIG. 18

Os termos 64 e 16 são simétricos em relação ao termo central. Assim, o termo central seria a raiz quadrada da multiplicação desses dois termos, ou seja, . Sabendo o valor central, é possível encontrar o termo simétrico ao 256. Com as duas diagonais completas, já sabemos a constante mágica, 32768, facilmente encontrando os outros termos. Abaixo, a solução completa:

4	128	64
512	32	2
16	8	256

FIG. 19

Questão para os alunos

Construa um quadrado mágico cuja constante mágica seja $a_5 = 10^5$.

Exemplo de solução: como sabemos de antemão, a constante mágica é igual a $a_1^3 \cdot q^{12}$. Assim:

$$10^{15} = a_1^3 \cdot q^{12} \text{ (1).}$$

Sabemos também que a raiz quadrada da multiplicação dos termos simétricos é igual ao termo central, assim: $\sqrt{a_1 \cdot a_n} = a_5$, ou seja, $\sqrt{a_1 \cdot a_9} = a_5$ (2).

A equação para o termo geral da PG é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Assim, para o nono termo, temos:

$$a_9 = a_1 \cdot q^8 \ (3).$$

Juntando a equação (3) na (2), encontramos:

$$\sqrt{a_1 \cdot a_1 \cdot q^8} = a_5$$

$$\sqrt{a_1^2 \cdot q^8} = a_5$$

$$a_1 \cdot q^4 = a_5 \ (4).$$

Substituindo em (1), obtemos:

$$(a_1 \cdot q^4)^3 = a_5^3 = 10^{15}$$

$$a_5 = 10^5.$$

Agora, sabendo o termo central, podemos escolher qualquer razão e construir uma PA que preencherá o quadrado mágico. Por exemplo, com razão 10, teremos:

10^2	10^7	10^6
10^9	10^5	10
10^4	10^3	10^8

FIG. 20

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Leonardo Barichello

Coordenação de redação
Rita Santos Guimarães

Redação
Mariana Sacrini Ayres Ferraz

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara de Oliveira

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira da Costa
Vice-Reitor e Pró-Reitor de Pós-Graduação
Edgar Salvadori De Decca

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal