Matemática Multimídia

ANÁLISE DE DADOS
E PROBABILIDADE

GUIA DO PROFESSOR

Experimento

O método de Monte Carlo

Objetivos da unidade

1. Apresentar um método interessante e simples que permite estimar a área de uma figura plana qualquer;
2. Abordar probabilidade geométrica.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

O método de Monte Carlo

Guia do professor

Sinopse

Neste experimento, será apresentado aos alunos um processo interessante que serve para estimar a área de uma figura plana qualquer, conhecido por ser uma das aplicações do Método de Monte Carlo. Para isso, na primeira etapa, tentaremos mostrar aos alunos que o método funciona e, na segunda etapa, pediremos para que calculem a área real do território brasileiro a partir de um mapa cuja área será estimada pelo método aprendido.

Conteúdos

- Probabilidade: Probabilidade Geométrica;
- Razão e Proporção: Proporcionalidade Direta.

Objetivos

1. Apresentar um método interessante e simples que permite estimar a área de uma figura plana qualquer;
2. Abordar probabilidade geométrica.

Duração

Uma aula simples.

Material relacionado

Experimento: Apostas no relógio, Quantos peixes há no lago?

Matemática Multimídia

Introdução

Podemos dizer que os métodos do tipo Monte Carlo usam a sorte ou o azar a favor de quem precisa fazer algumas estimativas de áreas, por exemplo. Exploradores de petróleo e de minerais também usam métodos semelhantes para estimar a quantidade do material precioso em uma jazida recém descoberta. Há muitos cálculos em Física Nuclear e de Altas Energias que precisam determinar quantidades equivalentes a áreas (integrais) que são impossíveis de se calcular de maneira exata e muito demoradas para o computador calcular com alta precisão. Nestes casos, as estimativas fornecidas pelos métodos de Monte Carlo são cruciais para obter respostas razoáveis em tempos aceitáveis pelos cientistas.

O cálculo da área dos objetos desta atividade poderia ser feito de várias outras maneiras. O principal objetivo do experimento não é a obtenção da área e sim a percepção de como podemos responder perguntas de cálculo utilizando ferramentas probabilísticas.

Motivação

Esta atividade é simples, lúdica, muito prática e lida com estatística e probabilidade, relacionando-as a conceitos geométricos.

O experimento

Etapa 1 **Será que o método funciona?**

Esta etapa pretende dar alguma confiança aos alunos de que o método funciona no contexto de medida e de experimento, isto é, trata-se de estimativas estatísticas com erros devido a flutuação na amostra, além dos erros de limitações das medidas diretas.

Foi declarado sem demonstração que a relação

$$\frac{\text{quantidade média de grãos dentro da figura plana}}{\text{quantidade total de grãos dentro da caixa}} \approx \frac{\text{área da figura plana}}{\text{área do fundo da caixa}} \; (*)$$

vale para qualquer figura plana que esteja colada no fundo da caixa de sapato. O principal argumento para a demonstração desta proposição está no Fechamento deste guia e os detalhes podem ser encontrados na referência.

Podemos dizer que a característica aleatória do procedimento está no fato de que os grãos não distinguem um ponto de outro, de forma que, ao final da mistura, os grãos ficam distribuídos de forma homogênea, em média.

No experimento, a distribuição uniforme de 160 grãos em uma área de 374 cm^2 implica a associação, em média, de um grão para cada

$$\frac{374}{160} \approx 2,34\text{cm}^2.$$

É claro que o aumento da quantidade de grãos vai aumentar a acurácia da medida da área, desde que a distribuição seja mantida, em média, homogênea na caixa. Sugira aos alunos experimentarem com outras figuras planas de áreas conhecidas, como o triângulo e o retângulo. Entretanto, observe que as contas feitas no experimento e neste guia não darão resultados similares para outras caixas e outras quantidades de grãos.

Etapa 2 **Uma boa aplicação do método**

A aplicação para a medida da área de um mapa do Brasil é interessante por dois motivos: o primeiro por ser uma figura plana não regular e o segundo por usar o princípio da semelhança das figuras para relacionar com a área real do Brasil. No entanto, tanto as medidas quanto as estimativas têm erros e é interessante discuti-los.

Erros nas medidas

A figura copiada apresenta distorções, tanto na planificação de parte do globo terrestre em um mapa plano, quanto na cópia em uma impressora. As medidas obtidas das distâncias entre as cidades mencionadas e a área real do Brasil são as melhores possíveis no globo e não necessariamente mantêm a proporcionalidade no mapa utilizado. Finalmente, a medida tomada com o uso de uma régua milimetrada tem a limitação da precisão da ordem de um milímetro. Assim, a medida do comprimento de 8,6 cm conta com apenas dois algarismos significativos, o que implica resultados com apenas dois algarismos significativos.

Erros estatísticos

No caso deste experimento, é de se esperar que a distribuição de grãos seja aproximadamente homogênea, sendo que as possíveis flutuações da distribuição homogênea implicam erros nas estimativas feitas.

Fechamento

Vamos justificar em termos de probabilidade geométrica por que o método proposto funciona.

Considere um único grão que, ao ser agitado de maneira completamente aleatória, termina seus movimentos em um local da caixa que tenha uma figura plana. Com hipótese randômica, podemos dizer que a probabilidade de que o grão estacione sobre a figura é

$$p = \frac{A_f}{A_t},$$

onde A_f é a área da figura considerada e A_t é a área total do fundo da caixa em consideração. Assim, temos um sistema de dois eventos para cada grão. Ele pode estar sobre a figura com probabilidade p; ou não, com probabilidade $q = 1 - p$. Se repetirmos o procedimento N vezes, podemos calcular a probabilidade de que em n vezes o grão vai parar sobre a área da figura plana. Este cálculo é feito pela distribuição binomial. Para os nossos propósitos, basta-nos saber que a média de n será dada por Np, em termos simbólicos

$$\overline{n} = Np \to \frac{\overline{n}}{N} = p = \frac{A_f}{A_t}.$$

O método empregado usa este resultado e, ao invés de usarmos um único grão por vez, usamos N grãos ao mesmo tempo. Como o número de grãos é grande e a proporção da figura não é extremamente pequena (nem extremamente grande), um resultado importante em probabilidade nos garante que a proporção de grão dentro da figura é uma boa estimativa da área da figura em relação à da caixa. Este resultado é chamado Teorema Central do Limite. Mais precisamente, este resultado afirma que o erro da previsão feita é igual a:

$$ER = \frac{\delta}{\overline{n}} = \frac{\sqrt{\frac{q}{p}}}{\sqrt{N}}.$$

Por causa desta relação, entendemos que, quanto maior for a quantidade de grãos, melhor será a estimativa da área, uma vez que este erro relativo é inversamente proporcional à raiz quadrada de N.

Variações

Considere a mesma caixa, mas agora divida em faixas paralelas de mesma largura (um palito de dentes ou de fósforos), como na FIGURA 1.

FIG. 1

A razão entre a quantidade de palitos que cai sobre as linhas e o total de palitos utilizados é uma aproximação estatística para a razão $2/\pi$. Se a divisão da caixa em faixas não for de mesmo tamanho, podemos considerar faixas maiores que o tamanho do palito. Digamos que o palito tenha comprimento t e a faixa tenha largura $h \geqslant t$. Neste caso, o valor esperado é a razão

$$\frac{2}{\pi} \times \frac{h}{t}.$$

No experimento, feito com apenas 18 palitos, a caixa fechada foi chacoalhada de maneira a tornar a direção e a distribuição dos palitos o mais homogênea e isotrópica possível, isto é, nenhuma posição nem direção devem ser privilegiadas.

Em seguida, conta-se os palitos que cruzam as linhas. Este procedimento foi repetido cinco vezes e obtivemos a média de $10,5$ palitos que cruzavam a linha. Arredondando para dois algarismos significativos, temos a razão $^{11}/_{18} = 0,61$ e o valor esperado é , que implica um erro relativo de 5%.

Para a turma de alunos perceber que esta é uma medida estatística do valor de π, é possível considerar a razão do dobro do total de palitos dividido pela quantidade de palitos que cruzavam a linha, em média. Isto é, no caso do experimento feito $^{36}/_{11} \approx 3,3$, quando o valor aproximado com dois algarismos significativos para π é $3,1$, que por sua vez tem um erro relativo de 6%.

Novamente, se a quantidade total de palitos aumentar, teremos melhores aproximações para o valor esperado. Veja as referências para a justificativa desta estimativa.

Este experimento é conhecido por "agulhas de Buffon" e a terceira referência bibliográfica traz mais informações sobre ele.

Bibliografia

W. Feller (1976). **Introdução à Teoria das Probabilidades e suas Aplicações**, vol I. Editora Edgard Blücher.

P. Meyer (2000). Probabilidade: Aplicações à Estatística. Editora LTC.
Nrich maths, The Monte Carlo Method, Disponível em *http://nrich.maths.org/6079*. Acesso em 1º de setembro de 2010.

Solomon, H (1978). **Buffon Needle Problem, Extensions, and Estimation of pi**. Ch. 1 in Geometric Probability. Philadelphia, pa: siam, pp. 1-24.

Wagner, E. **Probabilidade geométrica**. Revista do professor de matemática, vol. 34.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

AUTORA
Samuel Rocha de Oliveira

REVISORES
Matemática
Laura L. R. Rifo
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

PROJETO GRÁFICO
Preface Design

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Reitor
Fernando Ferreira da Costa
Vice-Reitor e Pró-Reitor de Pós-Graduação
Edgar Salvadori De Decca

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal