

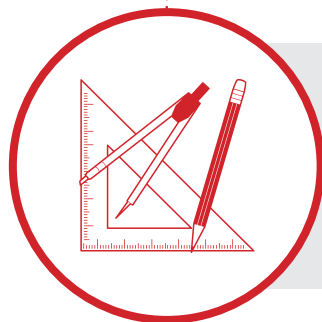


Matemática Multimídia

ANÁLISE DE DADOS  
E PROBABILIDADE



## O EXPERIMENTO



# Experimento


Apostas no relógio

### Objetivos da unidade

1. Capacitar o aluno a tomar decisões de acordo com o resultado de um experimento aleatório;
2. Aplicar o conceito de interpretação geométrica de probabilidade.



UNICAMP

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 



FUNDO NACIONAL  
DE DESENVOLVIMENTO  
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de  
Educação a Distância

Ministério da  
Ciência e Tecnologia

Ministério  
da Educação



# Apostas no relógio

## O EXPERIMENTO

### Sinopse

Este experimento trata de um jogo muito simples: sorteamos dois números de 0 a 59 e, utilizando dois ponteiros em um relógio, representamos os números sorteados como seus minutos. Dessa forma, o relógio será dividido em duas regiões (setores circulares).

Jogaremos com dois times: um deles vence se a marca de 0 min estiver na maior região e o outro, se estiver na menor. O que queremos saber é se algum dos times tem mais chances de vencer do que outro.

### Conteúdos

Probabilidade: Interpretação geométrica de probabilidade, Representação gráfica, Independência.

### Objetivos

1. Capacitar o aluno a tomar decisões de acordo com o resultado de um experimento aleatório;
2. Aplicar o conceito de interpretação geométrica de probabilidade.

### Duração

Uma aula dupla.

### Recursos relacionados

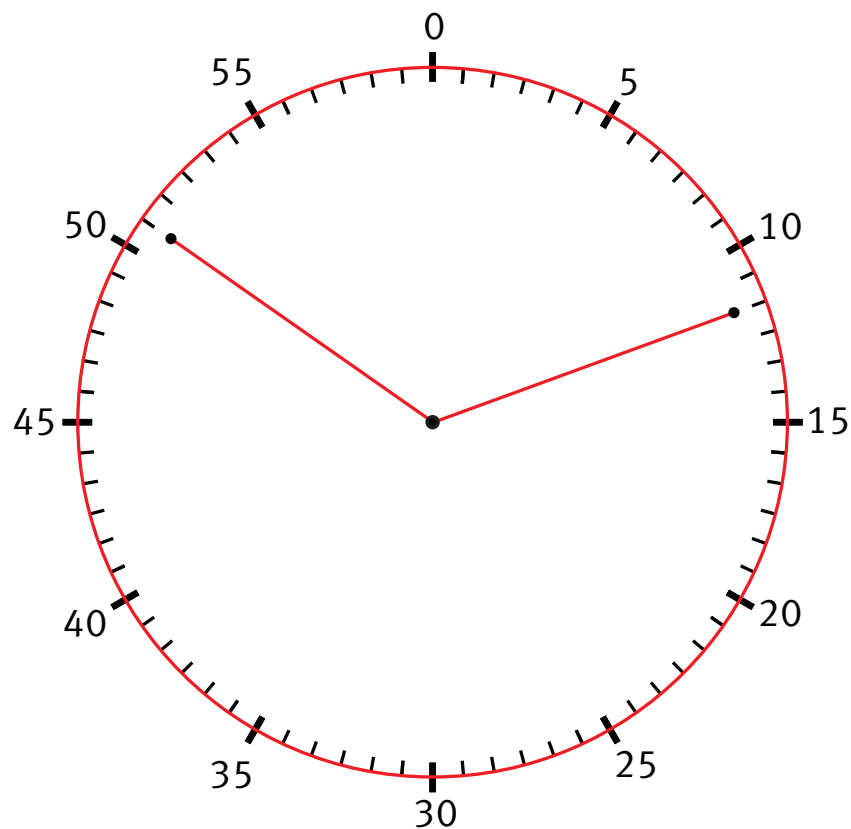
- Vídeo: O CRIME DA RUA DO GASÔMETRO;
- Áudio: FRAUDE 171;
- Software: PROBABILIDADE COM URNAS.



# Introdução

---

Quando estudamos probabilidade, os exemplos mais comuns são os experimentos com resultados equiprováveis: sorteio de bolinhas, cartas, fichas e outros elementos indistinguíveis entre si. Contudo, neste experimento, apresentamos um jogo que contraria o senso comum. À primeira vista, temos a impressão de que os dois times envolvidos têm a mesma chance de vencer. Porém, através da análise dos resultados, é possível verificar que um dos times tem 75% de chance de vitória enquanto o outro tem apenas 25%.



# O Experimento

---

## Material necessário

---

- Desenho de um relógio de parede (sem os ponteiros) (*Pode ser utilizado o desenho do Anexo ou os alunos podem fazê-lo.*);
  - Urna ou saquinho escuro para o sorteio.
- 

## Comentários iniciais

---

Na ETAPA 1 do EXPERIMENTO, os alunos poderão adquirir familiaridade com as regras do jogo, fazendo um grande número de jogadas e registrando-as em tabelas.

Já na ETAPA 2, eles farão a leitura das informações coletadas, representando-as em gráficos de dispersão. Além disso, eles calcularão as frequências relativas dos pontos de cada time.

Feito isso, eles serão questionados sobre qual time tem maior chance de vencer uma partida e o porquê disso.

---

## Preparação

---

Organize a classe em duplas. Cada par de equipes jogará entre si e deverá preparar 60 fichas, numeradas de 0 a 59, colocando-as em uma urna (ou em um saquinho escuro). As fichas podem ser feitas com pedaços de papel dos cadernos.

---

## Regras do jogo

---

1. As equipes devem decidir quem será o time A e quem será o time B;
2. Cada equipe deve sortear uma ficha em cada jogada;
3. Com ajuda de dois ponteiros, as equipes devem representar os dois valores extraídos como se fossem minutos do relógio;
4. Com os dois números marcados, o relógio é dividido em duas regiões (setores circulares). O time A marca um ponto se a marca de 0min estiver na maior região definida pelos ponteiros do relógio. Caso contrário, o time B marca um ponto. Se as duas regiões tiverem a mesma área, desconsidere a jogada (empate) e ninguém marca ponto. O empate também acontece se a marca de 0min estiver na fronteira das regiões;
5. Ganha a partida o time que marcar 10 pontos primeiro.

---

★ *Os ponteiros podem ser, por exemplo, dois lápis.*

---

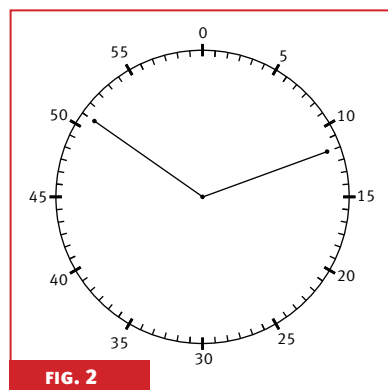
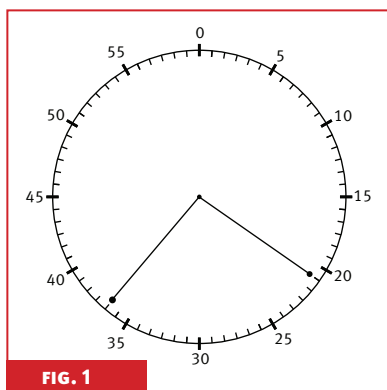
---

★ *Professor, a fim de obter mais dados, a partida pode terminar quando um time marcar 15, 20 ou até mais pontos. Fica a seu critério essa escolha, que deve levar em conta o tempo disponível.*

---

Por exemplo, segundo as regras do jogo, se as equipes sortearem as fichas com os números 21 e 37, e marcarem esses valores no relógio, podemos ver, pela figura 1, que a marca de 0min está na maior região. Logo, o time A marca um ponto.

Por outro lado, se as equipes sortearem as fichas com os números 10 e 50, e marcarem esses valores no relógio, podemos ver, pela figura 2, que a marca de 0min está na menor região. Logo, o time B marca um ponto.



## O jogo

ETAPA

1

Nesta etapa, seus alunos deverão jogar duas partidas do Jogo do Relógio, preenchendo duas tabelas como a do exemplo abaixo (TABELA 1). Após o término de cada partida, as equipes podem mudar de time se desejarem.

Jogada	Primeira ficha	Segunda ficha	Time ganhador
1	54	3	B
2	58	37	A
3	24	15	A
4	4	51	B
5	48	35	A
6	29	51	A
7	14	1	A
8	51	22	A
9	48	30	A
10	44	42	A
11	49	03	B
12	34	02	B
13	23	26	A
14	13	08	A

TABELA 1 Registro dos resultados do experimento.

Na tabela acima, as duas colunas centrais indicam as fichas obtidas em cada uma das extrações, e a quarta coluna mostra o time que marcou o ponto na jogada. Na última linha, temos o resultado do jogo: neste exemplo, A venceu ao marcar seu 10º ponto na 14ª jogada.

## Análise dos resultados

ETAPA

2

Nesta etapa, seus alunos construirão um gráfico de dispersão para os dados obtidos, a fim de analisá-los e observar se algum time tem vantagem sobre o outro. Antes disso, porém, eles deverão calcular as frequências relativas dos pontos de cada time.

### Frequências relativas

A frequência relativa de certo resultado nada mais é do que o quociente entre o número de vezes que esse resultado foi observado e o número total de observações. A partir dela, podemos obter o percentual de vezes que um evento ocorreu.

Para a tabela de resultados do nosso exemplo, vemos que a frequência relativa de pontos do time A é  $\frac{10}{14} \approx 0,714 = 71,4\%$  e, de forma análoga, a frequência relativa de pontos do time B é  $\frac{4}{14} \approx 0,286 = 28,6\%$ .

A seguir está o gráfico que representa as frequências relativas dos pontos dos times A e B, de acordo com os dados da TABELA 1.

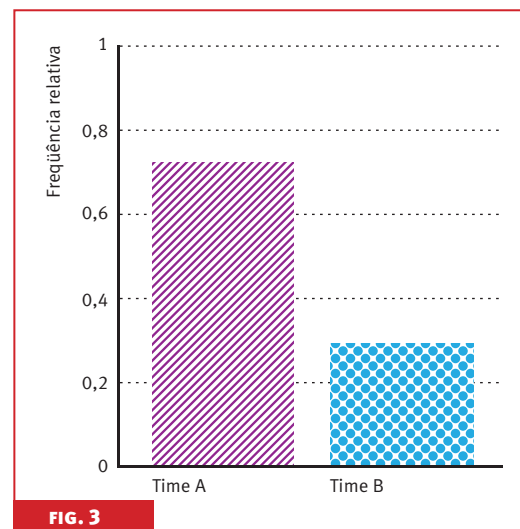


FIG. 3

Nesta parte do EXPERIMENTO, cada par de equipes deverá calcular as frequências relativas citadas levando em conta os dados das duas tabelas que construíram.

### Gráfico de dispersão

Agora, os alunos farão um gráfico de dispersão para os dados. Esse gráfico é feito colocando-se o valor da primeira ficha sorteada no eixo X e o valor da segunda ficha sorteada no eixo Y. Deve-se diferenciar os pontos do gráfico que favoreceram o time A dos que favoreceram o time B.

A seguir está o gráfico de dispersão dos dados, feito a partir das jogadas registradas na TABELA 1. Nele, os quadradinhos amarelos indicam os resultados em que o time A marcou ponto e os losangos verdes, os resultados em que o time B marcou ponto:

\* *Professor, se achar interessante, peça para os alunos construírem o gráfico de frequências relativas também.*

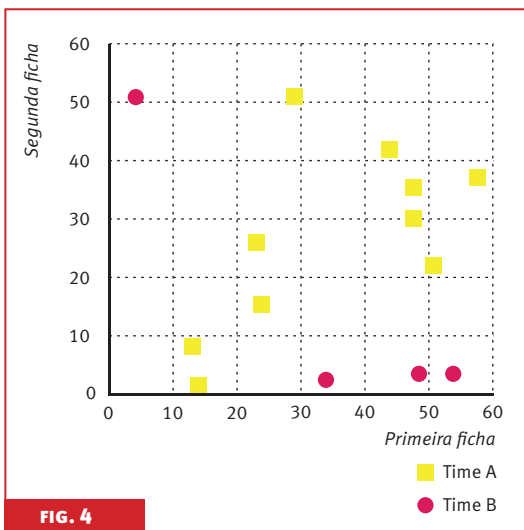


FIG. 4

Nesta última parte do EXPERIMENTO, cada par de equipes deverá fazer um gráfico como o acima, utilizando os dados de suas duas tabelas.

A partir da análise desse gráfico e da frequência relativa, os alunos já devem estar aptos a responder qual time tem maior chance de vencer o jogo e talvez até saibam explicar o motivo, que será discutido no FECHAMENTO.

## Fechamento

Primeiramente, faça uma discussão acerca da conclusão de seus alunos em relação a qual foi o melhor time no jogo. Pergunte a eles o porquê de eles acharem que tal time é o melhor. O fato é que o time A tem mais chances de vencer (75%) e o motivo disso será explicado na parte final deste FECHAMENTO.

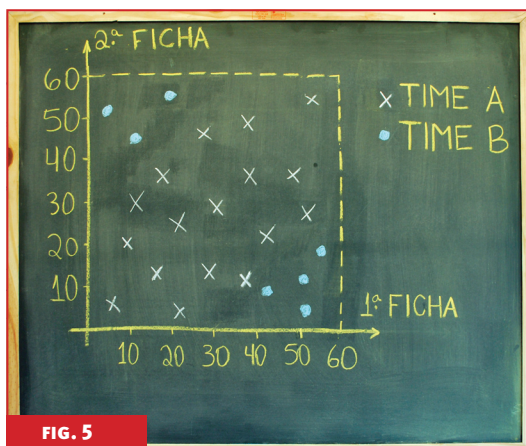
A construção de um gráfico de dispersão irá ajudar no entendimento da demonstração de que o time A tem mais chance de vencer e, por isso, deve ser feito em classe:

### Gráfico de dispersão

Para fazer este gráfico, colete os três primeiros pontos de cada par de equipes da classe. É importante que seu gráfico tenha pelo menos 20 pontos, com diferenciação entre os que deram ponto ao time A e os que deram ponto ao time B, como na figura a seguir:

★ Após essa discussão, pergunte à classe se em algum grupo o time B venceu.

! Professor, atente para possíveis erros de dados fornecidos pelos alunos, que podem indicar erroneamente um time como ganhador de um ponto.



Repare que neste gráfico os pontos que favorecem o time B ocupam apenas uma pequena região do quadrado  $[0, 60) \times [0, 60)$ .

#### Por que o time A tem mais chance de vencer?

Imagine que estamos jogando uma partida do Jogo do Relógio e que a primeira ficha sorteada seja o número 1. Assim, para o time A marcar ponto, a segunda ficha pode ser qualquer valor entre 2 e 30 (29 valores possíveis) e, para o time B marcar ponto, a segunda ficha pode ser qualquer valor entre 32 e 59 (28 valores possíveis). Se a segunda ficha for 31 ou 0 o jogo empata e é necessário jogar novamente. Dessa forma, temos praticamente a mesma probabilidade de o time A ou de o time B marcar um ponto.

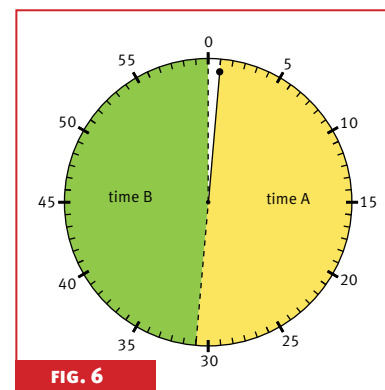


FIG. 6

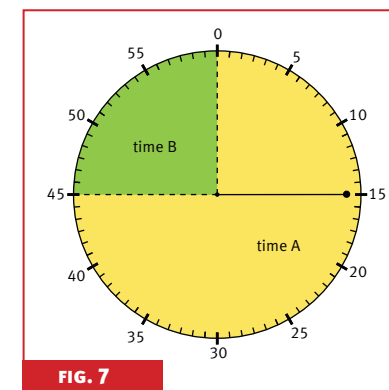


FIG. 7

Imagine agora que sorteamos o número 15 na primeira ficha da jogada. Para que o time A marque um ponto, a segunda ficha pode ter qualquer valor entre 16 e 44 (29 valores possíveis) e *também* qualquer valor entre 1 e 14 (mais 14 valores possíveis). O time B marcará um ponto apenas se o valor da segunda ficha estiver entre 46 e 59 (14 valores possíveis, apenas).

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos observar que qualquer que seja o valor da primeira ficha, o time A sempre terá chance maior do que ou igual de marcar ponto do que o time B. É muito importante que se discuta isso com seus alunos. Tente incentivá-los a pensar sobre o motivo de o time A ter mais chance de vencer o jogo antes de fazer a revelação. Sugerimos algumas perguntas, como:

---

+ *Observe que, se a primeira ficha for 30, o time A vencerá independentemente do valor da segunda ficha, com exceção do 0, quando a jogada empatará. Confira!*

---



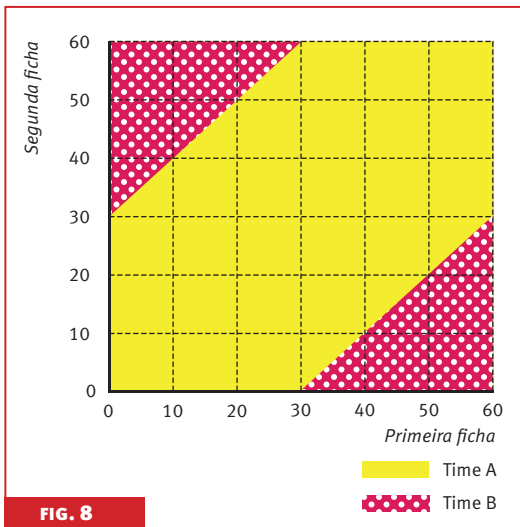
### Questão aos alunos

Se a primeira ficha for 1, qual deve ser o valor da segunda ficha para que o time A marque um ponto? Calcule também o valor da segunda ficha para o caso de a primeira ficha ser 15 e 30.

A seguir, vamos calcular a probabilidade de cada time vencer as partidas, aplicando o conceito de Interpretação Geométrica de Probabilidade.

#### Cálculo da probabilidade de o time A ganhar

Usando o mesmo raciocínio expresso anteriormente, podemos obter o gráfico a seguir:



+ Para este cálculo, estamos considerando o caso contínuo, isto é, como se o relógio não estivesse graduado apenas com números naturais, mas com números reais de 0 a 60.

A partir desse gráfico, vemos que a região de pontos que faz com que o time B marque um ponto equivale a apenas  $\frac{1}{4}$  da área do quadrado todo. Assim, usando uma interpretação geométrica, podemos dizer que o time B tem 25% de chance de marcar ponto, enquanto o time A tem 75%.

Reproduza a FIGURA 8 na lousa a partir do gráfico de dispersão desenhado anteriormente, explicando como fazê-la e calculando as probabilidades mostradas acima. Dessa maneira, seus alunos ficarão convencidos de que o time A é bem melhor tendo três vezes mais chances de vencer do que o time B.

Não é interessante como um jogo que inicialmente parece apresentar probabilidades iguais para os dois times contraria o senso comum?

\* Antes de fazer o cálculo, pode ser feito na lousa um gráfico de frequências relativas, levando em conta os dados da classe toda. Por ter muitos dados, as frequências tenderão aos valores calculados de 75% e 25% para os times A e B respectivamente.

# Ficha técnica

## AUTORA

Laura Letícia Ramos Rifo

## COORDENAÇÃO DE REDAÇÃO

Leonardo Barichello

## REDAÇÃO

Felipe Mascagna Bittencourt Lima

## REVISORES

### Matemática

José Plínio O. Santos

### Língua Portuguesa

Carolina Bonturi

### Pedagogia

Ângela Soligo

## PROJETO GRÁFICO

### E ILUSTRAÇÕES TÉCNICAS

Preface Design

## ILUSTRADOR

Lucas Ogasawara de Oliveira

## FOTÓGRAFO

Augusto Fidalgo Yamamoto



## UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

### Reitor

José Tadeu Jorge

### Vice-Reitor

Fernando Ferreira da Costa

## GRUPO GESTOR DE PROJETOS EDUCACIONAIS (GGPE – UNICAMP)

### Coordenador

Fernando Arantes

### Gerente Executiva

Miriam C. C. de Oliveira

## MATEMÁTICA MULTIMÍDIA

### Coordenador Geral

Samuel Rocha de Oliveira

### Coordenador de Experimentos

Leonardo Barichello

## INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)

### Diretor

Jayme Vaz Jr.

### Vice-Diretor

Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 