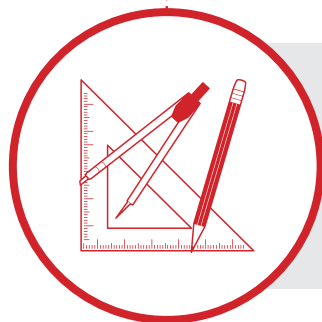




Matemática Multimídia

ANÁLISE DE DADOS
E PROBABILIDADE



O EXPERIMENTO

Experimento


Apostas no relógio

Objetivos da unidade

1. Capacitar o aluno a tomar decisões de acordo com o resultado de um experimento aleatório;
2. Aplicar o conceito de interpretação geométrica de probabilidade.



UNICAMP

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 



FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação



Apostas no relógio

O EXPERIMENTO

Sinopse

Este experimento trata de um jogo muito simples: sorteamos dois números de 0 a 59 e, utilizando dois ponteiros em um relógio, representamos os números sorteados como seus minutos. Dessa forma, o relógio será dividido em duas regiões (setores circulares).

Jogaremos com dois times: um deles vence se a marca de 0 min estiver na maior região e o outro, se estiver na menor. O que queremos saber é se algum dos times tem mais chances de vencer do que outro.

Conteúdos

Probabilidade: Interpretação geométrica de probabilidade, Representação gráfica, Independência.

Objetivos

1. Capacitar o aluno a tomar decisões de acordo com o resultado de um experimento aleatório;
2. Aplicar o conceito de interpretação geométrica de probabilidade.

Duração

Uma aula dupla.

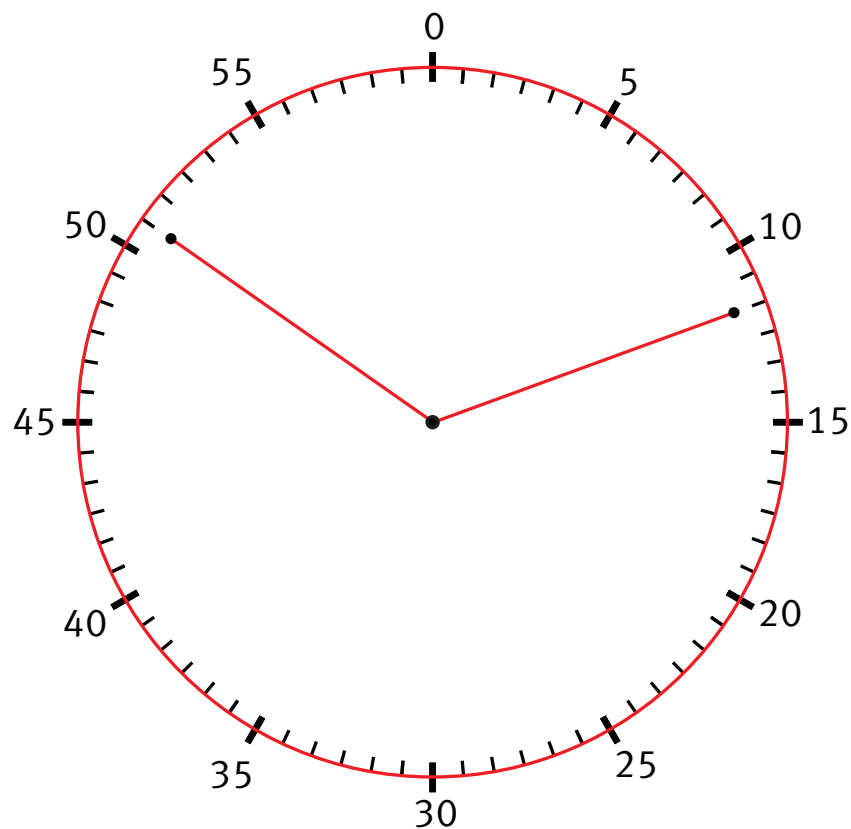
Recursos relacionados

- Vídeo: O CRIME DA RUA DO GASÔMETRO;
- Áudio: FRAUDE 171;
- Software: PROBABILIDADE COM URNAS.



Introdução

Quando estudamos probabilidade, os exemplos mais comuns são os experimentos com resultados equiprováveis: sorteio de bolinhas, cartas, fichas e outros elementos indistinguíveis entre si. Contudo, neste experimento, apresentamos um jogo que contraria o senso comum. À primeira vista, temos a impressão de que os dois times envolvidos têm a mesma chance de vencer. Porém, através da análise dos resultados, é possível verificar que um dos times tem 75% de chance de vitória enquanto o outro tem apenas 25%.



O Experimento

Material necessário

- Desenho de um relógio de parede (sem os ponteiros) (*Pode ser utilizado o desenho do Anexo ou os alunos podem fazê-lo.*);
 - Urna ou saquinho escuro para o sorteio.
-

Comentários iniciais

Na ETAPA 1 do EXPERIMENTO, os alunos poderão adquirir familiaridade com as regras do jogo, fazendo um grande número de jogadas e registrando-as em tabelas.

Já na ETAPA 2, eles farão a leitura das informações coletadas, representando-as em gráficos de dispersão. Além disso, eles calcularão as frequências relativas dos pontos de cada time.

Feito isso, eles serão questionados sobre qual time tem maior chance de vencer uma partida e o porquê disso.



Preparação

Organize a classe em duplas. Cada par de equipes jogará entre si e deverá preparar 60 fichas, numeradas de 0 a 59, colocando-as em uma urna (ou em um saquinho escuro). As fichas podem ser feitas com pedaços de papel dos cadernos.

Regras do jogo

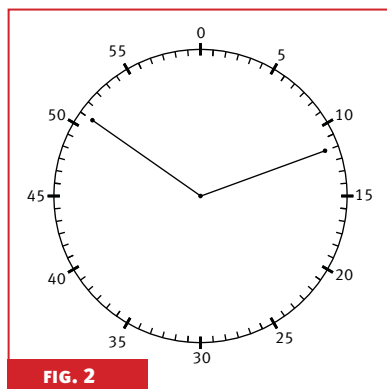
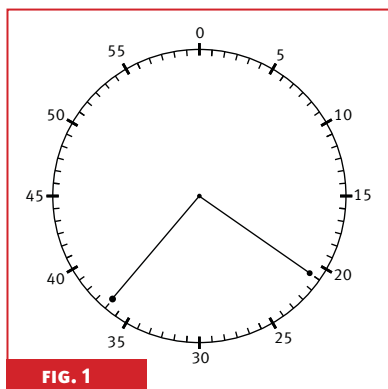
1. As equipes devem decidir quem será o time A e quem será o time B;
2. Cada equipe deve sortear uma ficha em cada jogada;
3. Com ajuda de dois ponteiros, as equipes devem representar os dois valores extraídos como se fossem minutos do relógio;
4. Com os dois números marcados, o relógio é dividido em duas regiões (setores circulares). O time A marca um ponto se a marca de 0min estiver na maior região definida pelos ponteiros do relógio. Caso contrário, o time B marca um ponto. Se as duas regiões tiverem a mesma área, desconsidere a jogada (empate) e ninguém marca ponto. O empate também acontece se a marca de 0min estiver na fronteira das regiões;
5. Ganha a partida o time que marcar 10 pontos primeiro.

* *Os ponteiros podem ser, por exemplo, dois lápis.*

* *Professor, a fim de obter mais dados, a partida pode terminar quando um time marcar 15, 20 ou até mais pontos. Fica a seu critério essa escolha, que deve levar em conta o tempo disponível.*

Por exemplo, segundo as regras do jogo, se as equipes sortearem as fichas com os números 21 e 37, e marcarem esses valores no relógio, podemos ver, pela figura 1, que a marca de 0min está na maior região. Logo, o time A marca um ponto.

Por outro lado, se as equipes sortearem as fichas com os números 10 e 50, e marcarem esses valores no relógio, podemos ver, pela figura 2, que a marca de 0min está na menor região. Logo, o time B marca um ponto.



O jogo

ETAPA

1

Nesta etapa, seus alunos deverão jogar duas partidas do Jogo do Relógio, preenchendo duas tabelas como a do exemplo abaixo (TABELA 1). Após o término de cada partida, as equipes podem mudar de time se desejarem.

| Jogada | Primeira ficha | Segunda ficha | Time ganhador |
|--------|----------------|---------------|---------------|
| 1 | 54 | 3 | B |
| 2 | 58 | 37 | A |
| 3 | 24 | 15 | A |
| 4 | 4 | 51 | B |
| 5 | 48 | 35 | A |
| 6 | 29 | 51 | A |
| 7 | 14 | 1 | A |
| 8 | 51 | 22 | A |
| 9 | 48 | 30 | A |
| 10 | 44 | 42 | A |
| 11 | 49 | 03 | B |
| 12 | 34 | 02 | B |
| 13 | 23 | 26 | A |
| 14 | 13 | 08 | A |

TABELA 1 Registro dos resultados do experimento.

Na tabela acima, as duas colunas centrais indicam as fichas obtidas em cada uma das extrações, e a quarta coluna mostra o time que marcou o ponto na jogada. Na última linha, temos o resultado do jogo: neste exemplo, A venceu ao marcar seu 10º ponto na 14º jogada.

Nesta etapa, seus alunos construirão um gráfico de dispersão para os dados obtidos, a fim de analisá-los e observar se algum time tem vantagem sobre o outro. Antes disso, porém, eles deverão calcular as frequências relativas dos pontos de cada time.

Frequências relativas

A frequência relativa de certo resultado nada mais é do que o quociente entre o número de vezes que esse resultado foi observado e o número total de observações. A partir dela, podemos obter o percentual de vezes que um evento ocorreu.

Para a tabela de resultados do nosso exemplo, vemos que a frequência relativa de pontos do time A é $\frac{10}{14} \approx 0,714 = 71,4\%$ e, de forma análoga, a frequência relativa de pontos do time B é $\frac{4}{14} \approx 0,286 = 28,6\%$.

A seguir está o gráfico que representa as frequências relativas dos pontos dos times A e B, de acordo com os dados da TABELA 1.



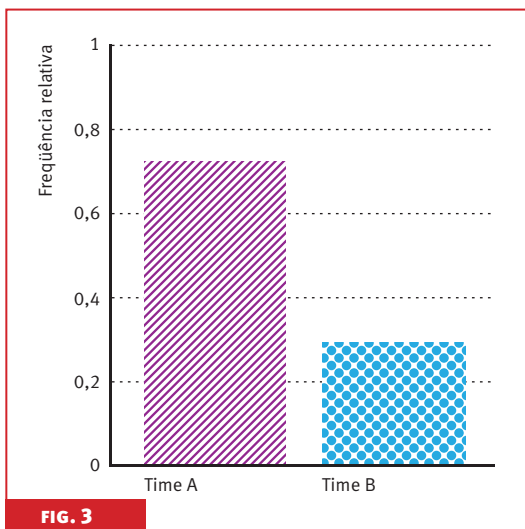


FIG. 3

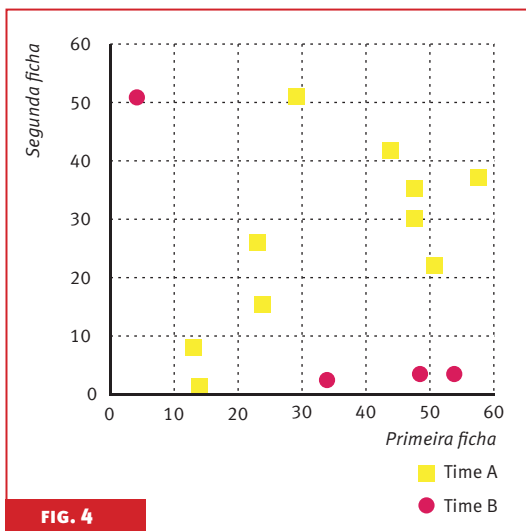
Nesta parte do EXPERIMENTO, cada par de equipes deverá calcular as frequências relativas citadas levando em conta os dados das duas tabelas que construíram.

Gráfico de dispersão

Agora, os alunos farão um gráfico de dispersão para os dados. Esse gráfico é feito colocando-se o valor da primeira ficha sorteada no eixo X e o valor da segunda ficha sorteada no eixo Y. Deve-se diferenciar os pontos do gráfico que favoreceram o time A dos que favoreceram o time B.

A seguir está o gráfico de dispersão dos dados, feito a partir das jogadas registradas na TABELA 1. Nele, os quadradinhos amarelos indicam os resultados em que o time A marcou ponto e os losangos verdes, os resultados em que o time B marcou ponto:

* *Professor, se achar interessante, peça para os alunos construírem o gráfico de frequências relativas também.*



Nesta última parte do EXPERIMENTO, cada par de equipes deverá fazer um gráfico como o acima, utilizando os dados de suas duas tabelas.

A partir da análise desse gráfico e da frequência relativa, os alunos já devem estar aptos a responder qual time tem maior chance de vencer o jogo e talvez até saibam explicar o motivo, que será discutido no FECHAMENTO.

Fechamento

Primeiramente, faça uma discussão acerca da conclusão de seus alunos em relação a qual foi o melhor time no jogo. Pergunte a eles o porquê de eles acharem que tal time é o melhor. O fato é que o time A tem mais chances de vencer (75%) e o motivo disso será explicado na parte final deste FECHAMENTO.

A construção de um gráfico de dispersão irá ajudar no entendimento da demonstração de que o time A tem mais chance de vencer e, por isso, deve ser feito em classe:

Gráfico de dispersão

Para fazer este gráfico, colete os três primeiros pontos de cada par de equipes da classe. É importante que seu gráfico tenha pelo menos 20 pontos, com diferenciação entre os que deram ponto ao time A e os que deram ponto ao time B, como na figura a seguir:

** Após essa discussão, pergunte à classe se em algum grupo o time B venceu.*

! Professor, atente para possíveis erros de dados fornecidos pelos alunos, que podem indicar erroneamente um time como ganhador de um ponto.

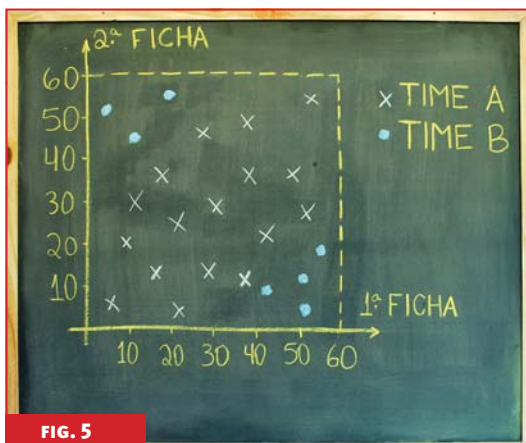


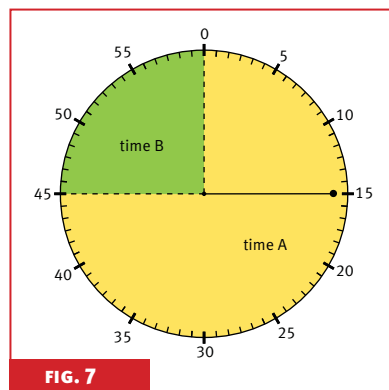
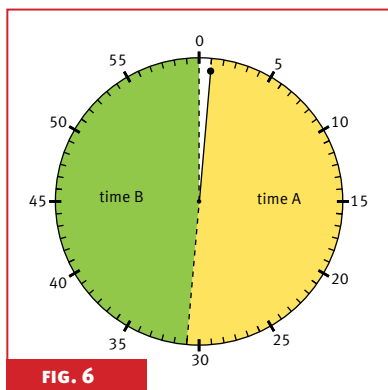
FIG. 5

Repare que neste gráfico os pontos que favorecem o time B ocupam apenas uma pequena região do quadrado $[0, 60] \times [0, 60]$.

Por que o time A tem mais chance de vencer?

Imagine que estamos jogando uma partida do Jogo do Relógio e que a primeira ficha sorteada seja o número 1. Assim, para o time A marcar ponto, a segunda ficha pode ser qualquer valor entre 2 e 30 (29 valores possíveis) e, para o time B marcar ponto, a segunda ficha pode ser qualquer valor entre 32 e 59 (28 valores possíveis). Se a segunda ficha for 31 ou 0 o jogo empata e é necessário jogar novamente. Dessa forma, temos praticamente a mesma probabilidade de o time A ou de o time B marcar um ponto.





Imagine agora que sorteamos o número 15 na primeira ficha da jogada. Para que o time A marque um ponto, a segunda ficha pode ter qualquer valor entre 16 e 44 (29 valores possíveis) e *também* qualquer valor entre 1 e 14 (mais 14 valores possíveis). O time B marcará um ponto apenas se o valor da segunda ficha estiver entre 46 e 59 (14 valores possíveis, apenas).

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos observar que qualquer que seja o valor da primeira ficha, o time A sempre terá chance maior do que ou igual de marcar ponto do que o time B. É muito importante que se discuta isso com seus alunos. Tente incentivá-los a pensar sobre o motivo de o time A ter mais chance de vencer o jogo antes de fazer a revelação. Sugerimos algumas perguntas, como:

+ *Observe que, se a primeira ficha for 30, o time A vencerá independentemente do valor da segunda ficha, com exceção do 0, quando a jogada empatará. Confira!*

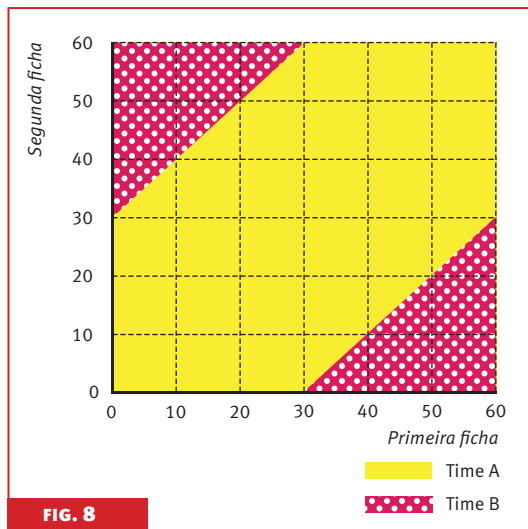
Questão aos alunos

Se a primeira ficha for 1, qual deve ser o valor da segunda ficha para que o time A marque um ponto? Calcule também o valor da segunda ficha para o caso de a primeira ficha ser 15 e 30.

A seguir, vamos calcular a probabilidade de cada time vencer as partidas, aplicando o conceito de Interpretação Geométrica de Probabilidade.

Cálculo da probabilidade de o time A ganhar

Usando o mesmo raciocínio expresso anteriormente, podemos obter o gráfico a seguir:



+ Para este cálculo, estamos considerando o caso contínuo, isto é, como se o relógio não estivesse graduado apenas com números naturais, mas com números reais de 0 a 60.



A partir desse gráfico, vemos que a região de pontos que faz com que o time B marque um ponto equivale a apenas $\frac{1}{4}$ da área do quadrado todo. Assim, usando uma interpretação geométrica, podemos dizer que o time B tem 25% de chance de marcar ponto, enquanto o time A tem 75%.

Reproduza a FIGURA 8 na lousa a partir do gráfico de dispersão desenhado anteriormente, explicando como fazê-la e calculando as probabilidades mostradas acima. Dessa maneira, seus alunos ficarão convencidos de que o time A é bem melhor tendo três vezes mais chances de vencer do que o time B.

Não é interessante como um jogo que inicialmente parece apresentar probabilidades iguais para os dois times contraria o senso comum?

* *Antes de fazer o cálculo, pode ser feito na lousa um gráfico de frequências relativas, levando em conta os dados da classe toda. Por ter muitos dados, as frequências tenderão aos valores calculados de 75% e 25% para os times A e B respectivamente.*

Ficha técnica

AUTORA

Laura Letícia Ramos Rifo

COORDENAÇÃO DE REDAÇÃO

Leonardo Barichello

REDAÇÃO

Felipe Mascagna Bittencourt Lima

REVISORES

Matemática

José Plínio O. Santos

Língua Portuguesa

Carolina Bonturi

Pedagogia

Ângela Soligo

PROJETO GRÁFICO

E ILUSTRAÇÕES TÉCNICAS

Preface Design

ILUSTRADOR

Lucas Ogasawara de Oliveira

FOTÓGRAFO

Augusto Fidalgo Yamamoto



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Reitor

José Tadeu Jorge

Vice-Reitor

Fernando Ferreira da Costa

GRUPO GESTOR DE PROJETOS EDUCACIONAIS (GGPE – UNICAMP)

Coordenador

Fernando Arantes

Gerente Executiva

Miriam C. C. de Oliveira

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA

Coordenador Geral

Samuel Rocha de Oliveira

Coordenador de Experimentos

Leonardo Barichello

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)

Diretor

Jayme Vaz Jr.

Vice-Diretor

Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 