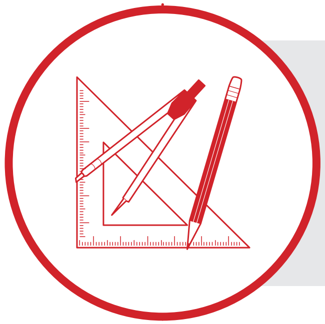
Matemática Multimídia

ANÁLISE DE DADOS
E PROBABILIDADE

Guia do professor



Experimento

Apostas no relógio

Objetivos da unidade

1. Capacitar o aluno a tomar decisões de acordo com o resultado de um experimento aleatório;
2. Aplicar o conceito de interpretação geométrica de probabilidade.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Apostas no relógio

Guia do professor

Sinopse

Este experimento trata de um jogo muito simples: sorteamos dois números de 0 a 59 e, utilizando dois ponteiros em um relógio, representamos os números sorteados como seus minutos. Dessa forma, o relógio será dividido em duas regiões (setores circulares).

Jogaremos com dois times: um deles vence se a marca de 0 min estiver na maior região e o outro, se estiver na menor. O que queremos saber é se algum dos times tem mais chances de vencer do que outro.

Conteúdos

Probabilidade: Interpretação geométrica de probabilidade, Representação gráfica, Independência.

Objetivos

1. Capacitar o aluno a tomar decisões de acordo com o resultado de um experimento aleatório;
2. Aplicar o conceito de interpretação geométrica de probabilidade.

Duração

Uma aula dupla.

Recursos relacionados

- Vídeo: O Crime da Rua do Gasômetro;
- Áudio: Fraude 171;
- Software: Probabilidade com Urnas.

Matemática Multimídia

Introdução

A probabilidade é um tópico importante da Matemática que lida com o conceito de incerteza. Utilizamos a probabilidade para modelar experimentos ou observações cujo resultado não conhecemos com precisão. Para sua formalização, utilizamos o conceito de *experimento* (ou observação) *aleatório*, que é qualquer experimento cujo resultado não é conhecido exatamente. Alguns exemplos de experimento aleatório podem ser o resultado do próximo jogo de seu time, as faces observadas em dois lançamentos de um dado, a quantidade de etnias indígenas existentes no Brasil em 1500 etc.

Chamamos de *espaço amostral* o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório. No primeiro exemplo, o espaço amostral poderia ser $\Omega_1 = \{\text{Vitória, Empate, Derrota}\}$ ou um conjunto numérico representando o saldo de gols marcados pelo seu time. No segundo exemplo, denotando por (i, j) o resultado i do primeiro lançamento e o resultado j do segundo, o espaço amostral pode ser

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= \{(i,j) : 1 \leq i, j \leq 6\} \\ &= \{(1,1),\ (1,2),\ \ldots,\ (1,6),\ (2,1),\ (2,2),\ \ldots,\ (6,6)\}\end{aligned}$$

Por fim, no último exemplo, o espaço amostral pode ser o conjunto dos números naturais, $\Omega_3 = N = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$.

Denominamos *evento* qualquer subconjunto do espaço amostral. Dessa forma, seguindo os exemplos anteriores, podemos dizer dos eventos que:

$$A = \text{“O seu time não perde o próximo jogo”} = \{\text{Vitória, Empate}\}$$

$$\begin{aligned}B &= \text{“segundo lançamento é 2”} \\ &= \{(1,2),\ (2,2),\ (3,2),\ (4,2),\ (5,2),\ (6,2)\}\end{aligned}$$

$$C = \text{“pelo menos 200 etnias”} = \{200,\ 201,\ 202,\ \ldots\}$$

Dois eventos de um experimento aleatório são chamados de *mutuamente exclusivos* se eles não puderem ocorrer simultaneamente. No exemplo dos lançamentos do dado, os eventos B e

$$D = \text{“a soma das faces é 9”} = \{(3,6),\ (4,5),\ (5,4),\ (6,3)\}$$

são *mutuamente exclusivos*, pois não podem ocorrer simultaneamente.

Probabilidade é também um conceito fortemente relacionado com informação: a probabilidade de um evento representa a chance de este evento acontecer de acordo com a informação disponível ao observador. Para estar bem definida, uma probabilidade deve satisfazer certas regras.

Definição

Dizemos que P é uma função de probabilidade definida em um conjunto de eventos associados ao espaço amostral Ω se:

1. $0 \leq P(E) \leq 1$, para todo o evento E;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ sempre que E e F forem eventos mutuamente exclusivos.

No exemplo do seu time, podemos concluir da informação disponível que, no próximo jogo,

$$P(\text{Vitória}) = 0.4$$

$$P(\text{Empate}) = 0.3$$

$$P(\text{Derrota}) = 0.3$$

Nos dois lançamentos do dado, pode ser razoável supor que todas as faces têm a mesma chance de ocorrer e, assim, nenhum par é mais provável que outro, ou seja, $P((i,j)) = {}^{1}\!/_{36}$, para todo $(i,j) \in \Omega_1$.

Sobre as etnias indígenas no Brasil, um antropólogo voltado a tais estudos poderia afirmar, por exemplo, que $P(C) = 0,5$.

Esse quadro, contudo, pode se modificar se houver uma nova informação a respeito das probabilidades em um evento. Por exemplo, qual é a probabilidade de que seu time não perca o próximo jogo se souber que foi comprado um excelente jogador? Ou ainda, qual é a probabilidade de que o evento B ocorra se souber que ocorreu o evento $E =$ "a soma das faces obtidas é 3" $= \{(1,2),\ (2,1)\}$?

O antropólogo Darcy Ribeiro estima que em 1957 havia 150 etnias indígenas no Brasil. Conhecendo o processo de dizimação que a população indígena sofreu, poderíamos dizer que, com essa nova informação, a probabilidade de que houvesse mais de 200 etnias indígenas no Brasil em 1500 passa a ser 0,8, por exemplo.

A atualização da probabilidade de um evento em face de uma nova informação é obtida pelo conceito de probabilidade condicional.

Definição

Sejam E e F eventos, tais que $P(F) > 0$. Definimos a probabilidade condicional de E dado F como

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

No exemplo dos lançamentos de um dado, a probabilidade de ocorrer o evento B sabendo que ocorreu E, é dada pela definição anterior

$$P(B \mid E) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)}$$

$$= \frac{P((1,2))}{P(\{(1,2),\ (2,1)\})} = \frac{1/36}{2/36} = 1/2.$$

Observe que a probabilidade de o segundo lançamento ser 2, que era originalmente igual a $1/6$, passa a ser igual a $1/2$ no momento em que nos é informado que a soma das faces é 3.

Ao contrário, quando a nova informação não modifica a probabilidade original de um evento, dizemos que eles são independentes. Mais formalmente, dados dois eventos E, F, com $P(F) > 0$, dizemos que E e F são independentes se $P(E \mid F) = P(E)$, ou seja, da definição de probabilidade condicional, E e F são independentes se

$$P(E \cap F) = P(E)P(F).$$

Esta última equação é também válida para o caso em que $P(F) = 0$. Caso contrário, dizemos que E e F são eventos dependentes.

Motivação

Neste experimento, cada um dos adversários sorteia um ponto aleatoriamente em um relógio, marcando-os com os ponteiros e dividindo o relógio em duas regiões.

O time A ganha se a marca do 0min ficar na região maior, se não, ganha o time B.

A pergunta é: algum dos times é favorecido pelo acaso?

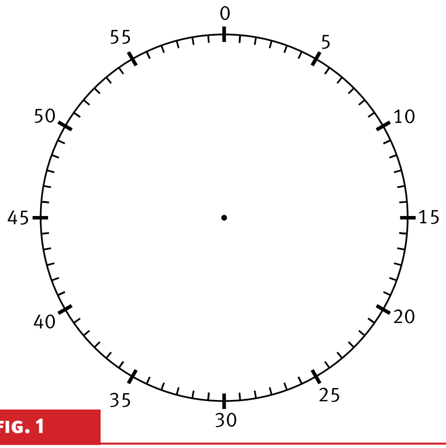


FIG. 1

O experimento

Neste experimento, cada um dos adversários deve escolher um ponto no relógio *aleatoriamente*. Esses pontos vão dividir o relógio em duas regiões. O time A ganha se a marca de 0 minutos ficar na região maior; se não, ganha o time B. A pergunta é: algum dos times é favorecido pelo acaso?

Lembremos que as regras do jogo são:

1. As equipes devem decidir quem será o time A e quem será o time B;
2. Cada par de equipes sorteia duas fichas ao acaso em cada jogada;
3. Com ajuda de dois ponteiros, represente no relógio os dois valores extraídos como se fossem seus minutos;
4. Com os dois números marcados, o relógio é dividido em duas regiões (seções circulares). O time A marca um ponto se a marca de 0 minutos estiver na maior região definida pelos ponteiros do relógio. Caso contrário, o time B marca um ponto. Se as duas regiões tiverem a mesma área, eles devem fazer uma nova jogada. O empate também acontece se a marca de 0min estiver na fronteira das regiões;
5. Ganha a partida o time que marcar 10 pontos primeiro.

Etapa 1 **O jogo**

Nesta primeira etapa, os alunos realizam jogadas e registram os resultados obtidos. Faremos tal procedimento analisando um exemplo de jogo registrado na tabela a seguir.

Jogada	Primeira ficha	Segunda ficha	Time ganhador
1	54	3	B
2	58	37	A
3	24	15	A
4	4	51	B
5	48	35	A
6	29	51	A
7	14	1	A
8	51	22	A
9	48	30	A
10	44	42	A
11	49	03	B
12	34	02	B
13	23	26	A
14	13	08	A

TABELA 1

Neste exemplo, A venceu 10 rodadas e B venceu 4. Nesta tabela, com os dados brutos, é possível observar que, entre os times A e B, A ganha mais vezes.

Etapa 2 **Análise dos resultados**

Nesta etapa, os alunos construirão dois gráficos: um de frequências relativas e um de dispersão para os dados obtidos.

O gráfico de frequências relativas representa o quociente entre o número de vezes que cada resultado é observado e o número total de observações. A partir dele, podemos observar o percentual de vezes que um evento ocorreu.

Para os resultados do exemplo anterior, temos o seguinte gráfico:

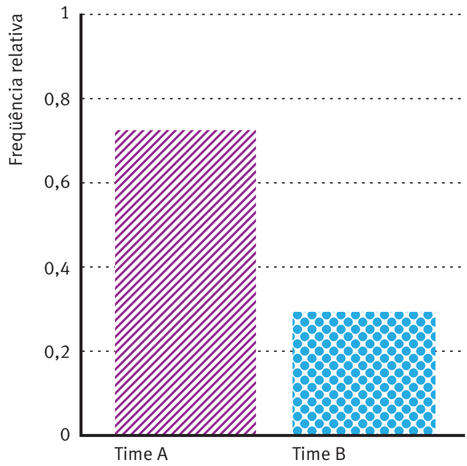


FIG. 2

Na FIGURA 1, observamos que o time A venceu praticamente o dobro de vezes do time B, de fato, em $^{10}/_{14}$ = 71,4% das rodadas. Podemos entender melhor esse resultado observando o gráfico de dispersão dos dados observados.

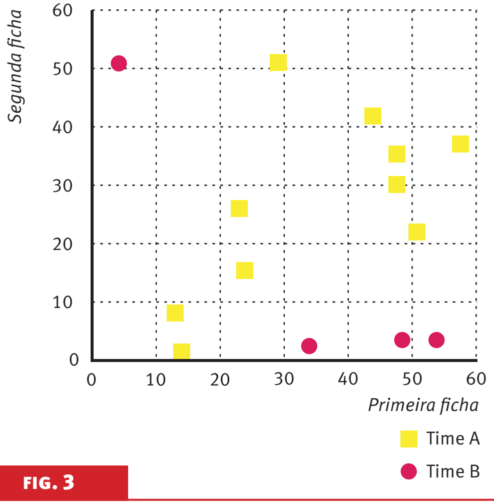


FIG. 3

O gráfico de dispersão é construído colocando o valor da primeira ficha sorteada no eixo X e o valor da segunda ficha sorteada no eixo Y. Desta maneira, obtemos um gráfico de pontos bidimensional representando as realizações do experimento feitas pelos alunos.

Neste gráfico, podemos discriminar os pontos que favorecem o time A daqueles que favorecem o time B, marcando os pontos de cada grupo com símbolos diferentes, por exemplo, quadrado para o time A e losango para o time B. Repare que, neste gráfico, os pontos que favorecem o time B ocupam apenas uma pequena região do quadrado $[0, 60) \times [0, 60)$.

Fechamento

Por que o time A tem mais chances de vencer?
Imaginemos que estamos jogando uma partida do Jogo do Relógio e que tiremos o número 1 como primeira ficha. Assim, para o time A marcar ponto, a segunda ficha pode ser qualquer valor entre 2 e 30 (29 valores possíveis) e, para o time B marcar ponto, qualquer valor entre 32 e 59 (28 valores possíveis). Se a segunda ficha for 31 ou 0, o jogo empata e há uma nova partida. Assim, temos praticamente a mesma probabilidade de o time A ou de o time B marcar um ponto. Com pequena vantagem para o time A.

Imaginemos agora que tiramos o número 15 na primeira ficha da jogada. Para que o time A marque um ponto, a segunda ficha pode ter qualquer valor entre 16 e 44 (29 valores possíveis) e *também* qualquer valor entre 1 e 14 (mais 14 valores possíveis). O time B marcará um ponto apenas se o valor da segunda ficha estiver entre 46 e 59 (14 valores possíveis, apenas). Seguindo o mesmo raciocínio, podemos observar que, qualquer que seja o valor da primeira ficha, o time A sempre terá maior chance de marcar ponto do que o time B.

Cálculo da probabilidade de o time A ganhar
A seguir, vamos calcular a probabilidade de cada time vencer as partidas aplicando o conceito de interpretação geométrica de probabilidade. Usando o mesmo raciocínio expresso acima, podemos obter o gráfico seguinte, que mostra a região de pontos que favorecem cada um dos times.

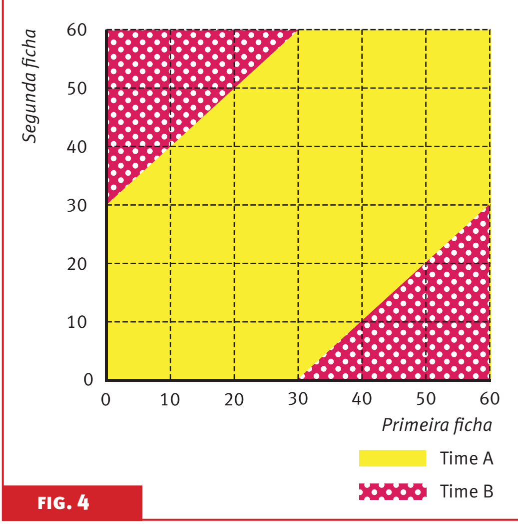


FIG. 4

A partir deste gráfico, vemos que a região de pontos que faz com que o time B marque um ponto equivale a ¼ da área total do quadrado. Dessa forma, usando uma interpretação geométrica, podemos dizer que o time B tem apenas 25% de chance de marcar ponto, enquanto o time A tem 75%.

Bibliografia

Feller, W. **Introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações.** Editora Edgard Blücher, 1976.

Meyer, P. **Probabilidade: Aplicações à Estatística**. Livros Técnicos e Científicos Editora, 2003.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autora
Laura Letícia Ramos Rifo

Revisores
Matemática
José Plinio O. Santos
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
José Tadeu Jorge
Vice-Reitor
Fernando Ferreira da Costa

Grupo Gestor de Projetos Educacionais (GGPE – UNICAMP)
Coordenador
Fernando Arantes
Gerente Executiva
Miriam C. C. de Oliveira

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL