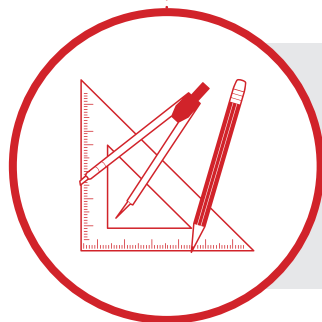




Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES



O EXPERIMENTO

Experimento

Torres de Hanói

Objetivos da unidade

1. Utilizar o jogo de estratégia para explorar o raciocínio lógico e a resolução de problemas;
2. Encontrar a relação algébrica que fornece o menor número de jogadas necessárias para resolver o jogo.



UNICAMP

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons



FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação



Torres de Hanói

O EXPERIMENTO

Sinopse

Este experimento se trata de um jogo conhecido por Torres de Hanói, o qual se constrói a partir de 3 pinos e alguns discos. Ele possui regras bem simples: os discos que, inicialmente, formam uma torre no primeiro pino, em ordem decrescente de tamanho, devem ser transferidos para o último, movendo-se apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior sobre um menor. Neste experimento, vamos, primeiramente, pensar em uma estratégia para solucionar esse jogo usando o menor número possível de movimentos. Depois, vamos tentar encontrar a relação algébrica que fornece o menor número possível de movimentos em função do número de discos na Torre.

Conteúdos

- Sequências;
- Função Exponencial, Aplicação.

Objetivos

1. Utilizar o jogo de estratégia para explorar o raciocínio lógico e a resolução de problemas;
2. Encontrar a relação algébrica que fornece o menor número de jogadas necessárias para resolver o jogo.

Duração

Uma aula dupla.



Introdução

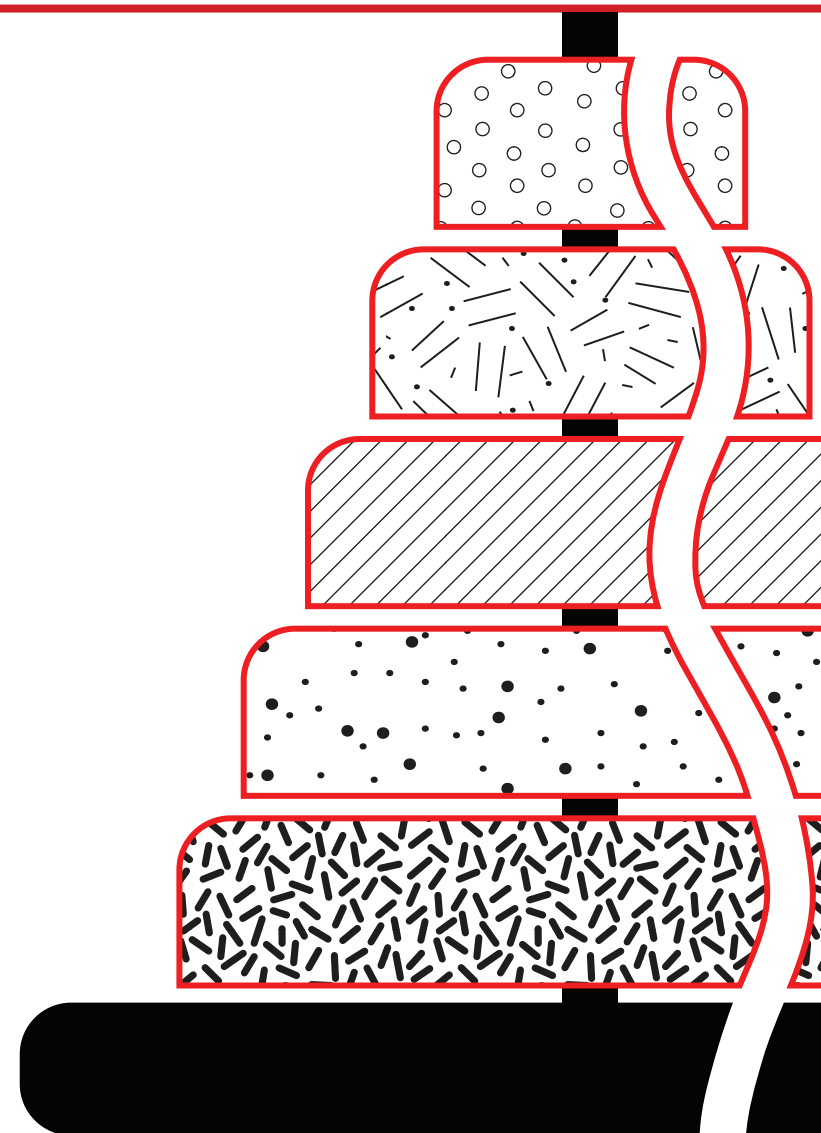
O objeto deste experimento é um jogo conhecido como as Torres de Hanói.

Sua origem está atrelada à seguinte lenda:

No começo dos tempos, Deus criou a Torre de Brahma com três pinos de diamante alinhados e colocou, no primeiro, 64 discos de ouro maciço em ordem decrescente de tamanho. Deus, então, chamou seus sacerdotes e ordenou a eles que transferissem todos os discos para o terceiro pino, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior sobre um menor. Os sacerdotes, então, obedeceram e começaram o seu trabalho, dia e noite. Quando eles terminarem, a Torre de Brahma irá ruir e o mundo acabará.

Felizmente, mesmo que essa lenda fosse verdade, poderíamos ficar tranquilos. Se fizermos as contas, veremos que serão necessários aos sacerdotes 18.446.744.073.709.551.615 movimentos, o que demoraria cerca de 585 bilhões de anos se cada movimento fosse feito em 1 segundo!

Até o final deste experimento, vamos ver como pode ser calculado esse número enorme.



O Experimento

Material necessário

- Placa de isopor de 15 mm;
- Placa de isopor de 20 mm;
- Compasso;
- Estilete;
- Varetas de churrasco;
- Papel seda de várias cores;
- Cola.

Materiais alternativos

- EVA ou madeira.



FIG. 1

Regras do jogo

O jogo é constituído por 3 pinos alinhados e alguns discos formando uma torre no primeiro pino (discos maiores ficam sob os menores). O jogo consiste em transferir toda essa torre para o último pino utilizando o do meio como auxiliar, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior sobre um menor.

+ *A Torre de Hanói foi inventada em 1883 por Edouard Lucas, inspirado pela história da Torre de Brahma.*

Construção das Torres de Hanói

ETAPA

1

Divida a classe em grupos de 3 alunos e forneça a cada um os materiais para a construção da Torre. Cada grupo deverá fazer os seguintes procedimentos:

- Com o isopor de 15 mm, construir 5 discos, de raios 1,5 cm, 2,0 cm, 2,5 cm, 3,0 cm e 3,5 cm. Depois, devem encapá-los com papel de seda de cores diferentes.
- Fazer uma placa de 23 cm x 8 cm com o isopor de 20 mm e fixar nela, de maneira alinhada, as três varetas de churrasco.
- Encaixar os discos no primeiro pino, em ordem decrescente de tamanho.

! *Professor, para economizar tempo na aula, peça aos alunos que construam a Torre em casa no dia anterior.*



O jogo

ETAPA

2

Explique as regras do jogo para os alunos e peça-lhes para tentar resolver o problema da torre com 1, 2 e 3 discos.

Feito isso, pergunte se eles acham que é possível prever qual será o menor número de movimentos necessários para transferir n discos do primeiro para o último pino. Promova uma discussão perguntando quantos movimentos seriam suficientes para transferir 10 discos.

Agora, chamando de n o número de discos na partida e de J o menor número de movimentos feitos para vencê-la, peça para os alunos tentarem preencher uma tabela como a seguinte:

★ *Para despertar o interesse dos alunos, conte a história de como foi inspirada a criação das Torres de Hanói.*



n	J
1	
2	
3	
4	
5	

TABELA 1 Exemplo de tabela para os alunos.

Quando notar que alguns grupos conseguiram chegar a alguma solução para 5 discos, dê início a socialização das soluções obtidas. Faça uma tabela na lousa registrando, para cada grupo, quantos movimentos foram necessários para conseguir mover os discos do primeiro para o último pino.

n	Grupo 1	Grupo 2	...	Grupo X
1	1	1	...	1
2	3	3	...	3
3	10	7	...	12
4
5

TABELA 2 Registro de dados

* O valor mínimo de lances em função do número n de discos é:
 1, se $n = 1$;
 3, se $n = 2$;
 7, se $n = 3$;
 15, se $n = 4$;
 31, se $n = 5$.

Depois de montar a TABELA 2, provavelmente alguns grupos não terão obtido o número mínimo de lances. Sendo assim, acrescente uma coluna na tabela indicando exatamente o menor valor de movimentos para cada n . Esses valores serão explicados no FECHAMENTO.

Investigação de uma relação

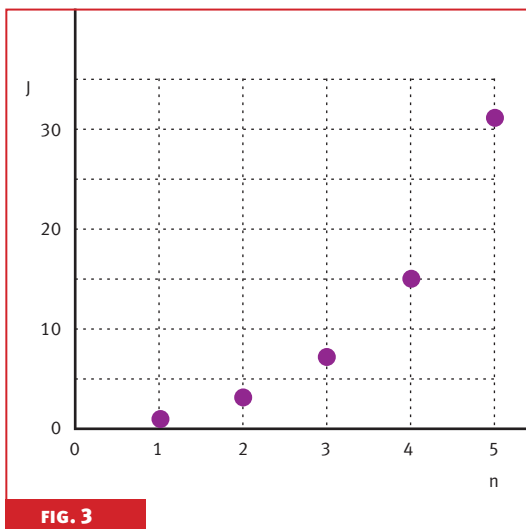
ETAPA

3

Agora, peça aos alunos para que tentem descobrir qual será o menor número de movimentos para 6, 7 e 8 discos, tomando por base a última coluna da tabela que você expôs na lousa.

Depois, peça para que escrevam os primeiros termos da sequência “Menor número de movimentos” (J) e façam um gráfico de $n \times J_n$, onde J_n é o número mínimo de movimentos para o caso de n discos.

★ *A sequência é*
 $J = (1, 3, 7, 15, 31, \dots)$
e o gráfico está representado na FIGURA 3.



Pergunte se esta sequência ou gráfico lembra alguma função (com domínio sendo os números naturais) já conhecida por eles.

Por fim, pergunte se eles saberiam descrever alguma fórmula que prediga o número mínimo de lances para solucionar o jogo a partir do número de discos na partida ou se saberiam escrever o termo geral da sequência.

Fechamento

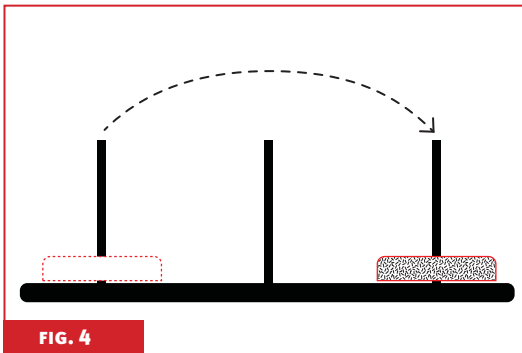
Primeiramente, faça uma discussão sobre as fórmulas que cada grupo encontrou e observe se alguns alunos conseguiram obtê-las corretamente. Pergunte como eles chegaram a essas relações e discuta se essas maneiras são ou não válidas.

A seguir, apresentaremos uma explicação para a solução das Torres de Hanói com o mínimo de movimentos e depois veremos como chegar à relação desejada.

Estudo da solução da Torre

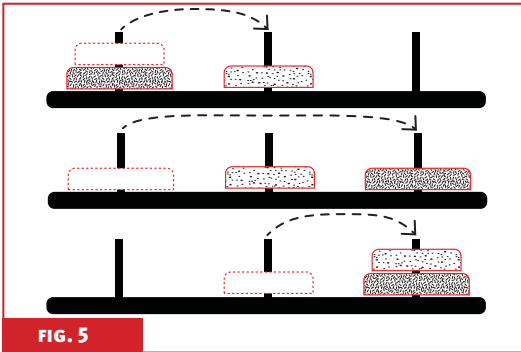
Geralmente, para resolver um problema que envolve n objetos, observamos primeiramente a solução para valores pequenos de n . Vejamos alguns casos nesse jogo, onde n denota o número de discos em cada jogada:

- Para $n = 1$, fazemos



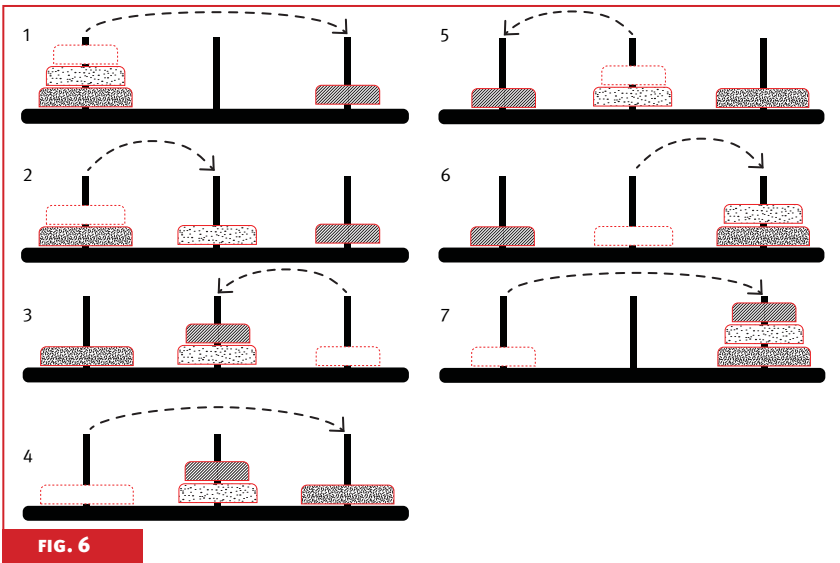
1 movimento foi suficiente.

- Para $n = 2$, fazemos



3 movimentos foram o suficiente.

- Para $n = 3$, fazemos

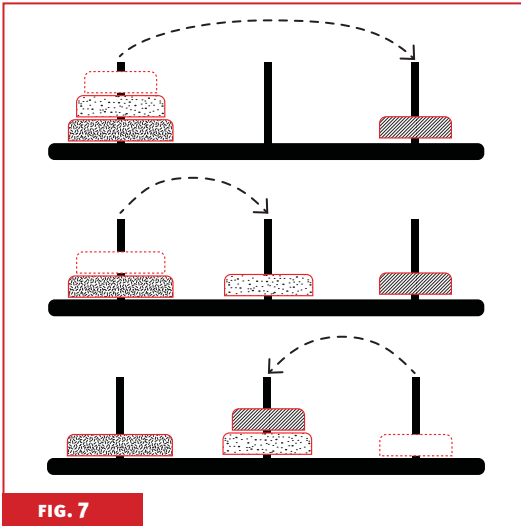


7 movimentos foram o suficiente.

Observemos que para valores de n muito grandes, a quantidade de movimentos aumenta muito. Vamos ver como resolver uma Torre com uma quantidade qualquer de discos.

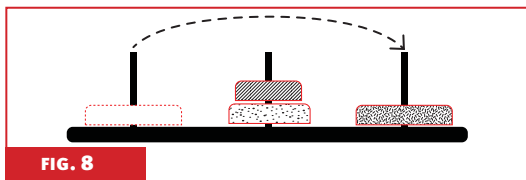
Como resolver a Torre com n discos?

Vamos olhar o caso $n = 3$ de outra maneira. Observe os três primeiros movimentos:



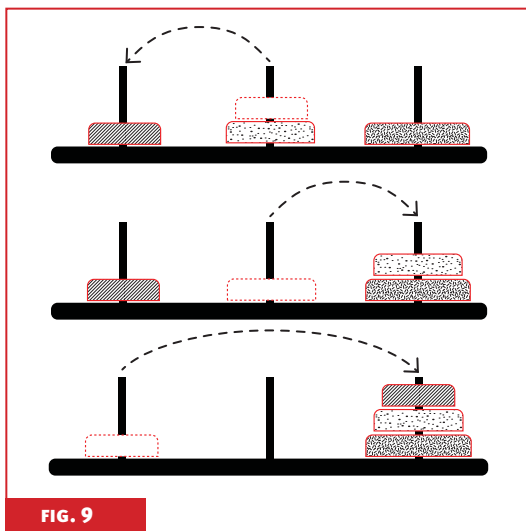
Note que fizemos o mesmo procedimento para resolver o caso de $n = 2$, com a diferença que, ao invés de transferir os 2 discos para o último pino, transferimos para o pino do meio.

O próximo movimento foi:



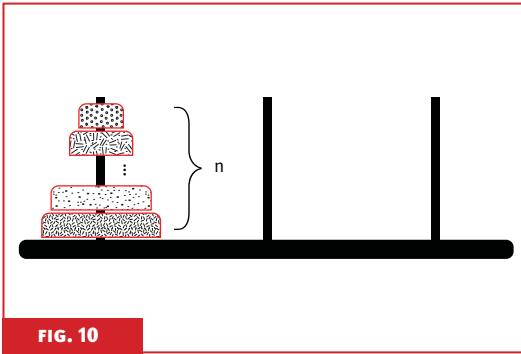
Isto é, passamos o disco maior para o último pino.

Agora, vejamos os três últimos movimentos:

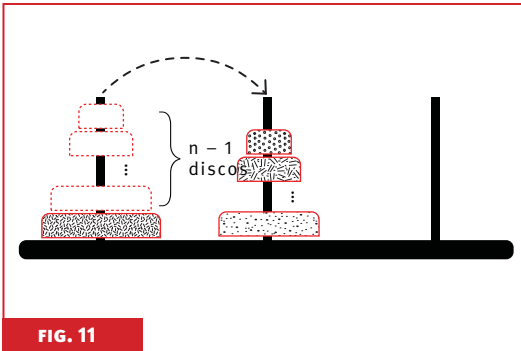


Novamente fizemos o mesmo que foi feito para o caso de $n = 2$, só que transferimos agora a subtorre para o pino onde está o disco maior.

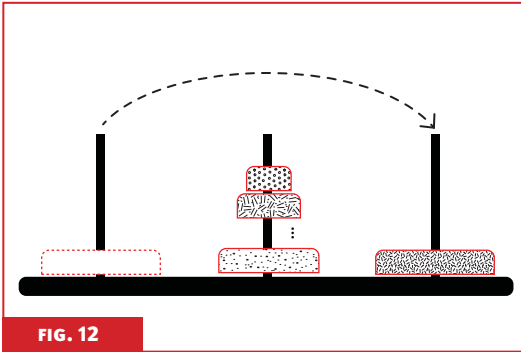
Agora imaginemos uma torre com n discos. Imaginemos também que sabemos resolver o problema com $(n - 1)$ discos.



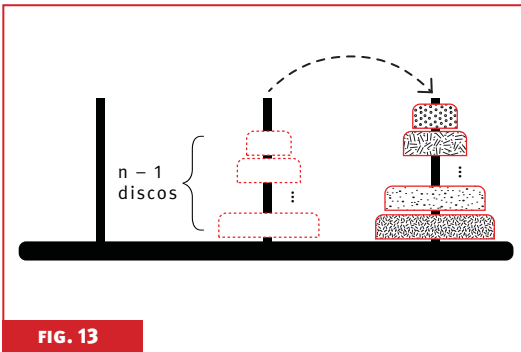
Para resolver a torre, podemos transferir os $(n - 1)$ discos de cima para o pino do meio (como já supomos que sabemos transferi-los para o terceiro, podemos fazer o mesmo para o pino central).



Depois passamos o disco maior para o terceiro pino:



E por fim, colocamos os $(n - 1)$ discos menores sobre o disco maior (como já sabemos passá-los do primeiro para o último, de maneira análoga podemos passar do segundo para o último).



Desse modo, podemos resolver o problema com n discos. Para resolver, por exemplo, o problema com 4 discos, transferimos os 3 discos menores para o pino central

(já sabemos fazer isso), depois passamos o disco maior para o último pino e por fim colocamos os 3 discos sobre o disco maior. Para resolver a Torre com 5 discos, transferimos os 4 discos menores para o pino central, e repetimos o mesmo procedimento.

Seguindo esse raciocínio, podemos encontrar uma relação que nos forneça o menor número possível de movimentos para uma Torre de n discos em função do número mínimo de movimentos para uma Torre de $(n - 1)$ discos, chamada *Relação de Recorrência*. A partir daí, podemos encontrar a relação entre o menor número de movimentos para uma Torre em função do número de discos que a Torre possui (*Fórmula Fechada*).

Encontrando as relações

Relação de Recorrência

Sendo J_n o menor número de movimentos necessários para transferir n discos do primeiro para o último pino, e analisando a explicação de como resolver a Torre, mostrada acima, podemos dizer que

$$J_n = J_{n-1} + 1 + J_{n-1} = 2 \cdot J_{n-1} + 1$$

Assim, podemos descobrir o valor de J_n para qualquer n dado. Teríamos, porém, que calcular todos os J_n anteriores.

Fórmula Fechada

O que queremos agora é descobrir uma relação de J_n dependendo apenas de n

+ Isso é verdade porque precisamos de J_{n-1} movimentos para movimentar os $(n - 1)$ primeiros discos, mais um para movimentar o disco maior e mais J_{n-1} para colocar os $(n - 1)$ discos sobre o maior.

e não do número J_{n-1} obtido na jogada anterior. Esta fórmula é, por costume, chamada de *fórmula fechada* e nem sempre é possível encontrá-la a partir da relação de recorrência. Vamos tentar para o nosso caso. Sabemos que:

$$J_n = 2 \cdot J_{n-1} + 1$$

$$J_n + 1 = 2 \cdot J_{n-1} + 2$$

$$J_n + 1 = 2 \cdot (J_{n-1} + 1)$$

* *Da primeira para a segunda passagem, apenas somamos 1 aos dois membros.*

Chamando $(J_n + 1)$ de A_n , temos:

$$A_n = 2 \cdot A_{n-1}$$

$$A_n = 2 \cdot 2 \cdot A_{n-2} = 2^2 \cdot A_{n-2}$$

$$A_n = 2^2 \cdot 2 \cdot A_{n-3} = 2^3 \cdot A_{n-3}$$

$$A_n = \dots = 2^{n-1} \cdot A_{n-(n-1)} = 2^{n-1} \cdot A_1$$

Como $A_1 = J_1 + 1 = 2$, temos

$$A_n = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$$

E como $A_n = J_n + 1$

$$J_n + 1 = 2^n$$

$$J_n = 2^n - 1$$

* *Se $A_n = 2 \cdot A_{n-1}$, então $A_{n-1} = 2 \cdot A_n$ e assim por diante.*

Ao observarmos a sequência de $J = (1, 3, 7, 15, 31, \dots)$, pode ficar intuitivo pensarmos nesta fórmula. É provável que alguns alunos consigam encontrar essa expressão rapidamente, mas isso não acontece com todos.

Assim, seria interessante transmitir toda essa discussão do FECHAMENTO para o aluno, tanto sobre a estratégia para se resolver a Torre usando o menor número de movimentos, quanto sobre como encontrar as relações desejadas.

E agora que conhecemos as relações, podemos voltar à lenda exibida na Introdução e calcular quantos movimentos seriam necessários aos sacerdotes para resolver a torre de 64 discos e quanto tempo levaria para que fizessem todos eles caso cada movimento levasse 1 segundo. Mas para isso, os alunos precisariam de uma boa calculadora, como a de um computador, por exemplo.

Por fim, um incentivo para conduzir este experimento é que ele se mostra interessante no sentido de fazer o aluno buscar padrões e regras ocultas, que é uma atividade típica de um cientista.



Ficha técnica

AUTORAS

Maria Lúcia Bontorim de Queiroz,
Claudina Izepe Rodrigues
e Eliane Quelho Frota Rezende

COORDENAÇÃO DE REDAÇÃO

Fabricao de Paula Silva

REDAÇÃO

Felipe Mascagna Bittencourt Lima

REVISORES

Matemática

Antônio Carlos Patrocínio

Língua Portuguesa

Carolina Bonturi

Pedagogia

Ângela Soligo

PROJETO GRÁFICO

Preface Design

ILUSTRADOR

Lucas Ogasawara de Oliveira

FOTÓGRAFO

Augusto Fidalgo Yamamoto



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Reitor

José Tadeu Jorge

Vice-Reitor

Fernando Ferreira da Costa

GRUPO GESTOR DE PROJETOS EDUCACIONAIS (GGPE – UNICAMP)

Coordenador

Fernando Arantes

Gerente Executiva

Miriam C. C. de Oliveira

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA

Coordenador Geral

Samuel Rocha de Oliveira

Coordenador de Experimentos

Leonardo Barichello

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)

Diretor

Jayme Vaz Jr.

Vice-Diretor

Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 