



Matemática
Multimídia



Guia do Professor

Áudio

Vênus e a trigonometria

Série Rádio Cangália

Objetivos

1. Apresentar a história sobre como os gregos antigos descobriram que Vênus era um planeta entre a Terra e o Sol;
2. Discutir a escala de magnitude aparente das estrelas.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao áudio ao qual este guia se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 



UNICAMP

Vênus e a trigonometria

Série

Rádio Cangália

Conteúdos

Trigonometria, logaritmo.

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivos

1. Apresentar a história sobre como os gregos antigos descobriram que Vênus era um planeta entre a Terra e o Sol;
2. Discutir a escala de magnitude aparente das estrelas.

Sinopse

O programa apresenta brevemente como os gregos antigos estimaram a razão entre o raio da órbita de Marte pelo da Terra, além de discutir a escala logarítmica da escala de magnitude aparente das estrelas.

Material relacionado

Vídeos: *Um caminho para o curral, Terremoto brasileiro*;
Áudios: *Titius e Bode*;
Experimento: *Qual é a altura da árvore.*



Introdução

Sobre a série

A série *Rádio Cangália* apresenta programas descontraídos de variedades que usualmente abordam uma informação ou notícia de conhecimentos gerais, com comentários de um professor de matemática. Os temas não são tratados em profundidade, mas oferecem oportunidade de o professor trabalhar assuntos interdisciplinares em sala de aula ou em atividades extraclasse. O programa pode trazer também uma piada ou uma frase célebre, sem preocupações maiores além de oferecer motivos de discussão em torno de um conteúdo e reforçar a descontração.

Sobre o programa

O programa foi desenvolvido a partir das seguintes falas:

- Queridos ouvintes da rádio Cangália. Eu sou a Ivone.
- E eu, amados alunos e professores da rádio Cangália: eu sou o Henrique.
- Apaixonantes teleouvintes deste programa. Eu sou o professor Leumas. Quanta gentileza com os ouvintes!
- Pois é, professor, é que o nosso programa vai falar da belíssima estrela-d'alva, que é o planeta Vênus; e Vênus é a da deusa do amor e da beleza.
- Durante o programa teremos algumas curiosidades matemáticas.
- E sempre, claro, com os comentários do nosso querido professor Leumas.
- O tema deste programa é o planeta Vênus.
- Também conhecido como estrela-d'alva, ou a estrela do amanhecer, ou joia da tarde.
- A agência espacial japonesa JAXA divulgou que o controle remoto do sistema de jatos da sonda espacial AKATSUKI funcionou como programado, indicando que o controle da sonda ao redor do planeta será bem sucedido.



- A nave espacial partiu da Terra ao final de maio e deve chegar a Vênus em dezembro de 2010.
- O objetivo da missão é estudar com detalhes a atmosfera e superfície de Vênus, com instrumentos meteorológicos avançados. Todas as informações serão enviadas para a Terra por pelo menos dois anos.
- Entender a atmosfera do nosso planeta vizinho ajuda a entender a do nosso, diz a nota da JAXA. Vênus já recebeu a visita de mais de trinta naves não tripuladas desde 1962. Foram sondas americanas, soviéticas e europeias. Esta é a primeira sonda japonesa enviada a Vênus.
- E, destas sondas que já orbitaram o planeta, sabemos que a atmosfera de Vênus tem temperatura média de quase quinhentos graus Celsius, tem pressão da ordem de cem vezes às similares na Terra e é essencialmente composta de gás carbônico com gotas de ácido sulfúrico em suspensão.
- Nossa! É o inferno! Mas Vênus não recebeu o nome em homenagem à deusa romana do Amor e da Beleza?
- Sim, Ivone. O nome do planeta seguiu a tradição de homenagear deuses da mitologia, mas não há relação entre o planeta em si e o significado do deus homenageado; qualquer que seja este significado.
- Mas tem gente que acha o amor quente.
- Mas não sufocante e ácido!
- Pessoal! Vamos falar do planeta Vênus! Os astrônomos antigos observaram a estrela da manhã e da tarde e deram nomes diferentes para elas até perceberem que eram o mesmo planeta.
- Só pra lembrar, os planetas mais próximos do Sol são: Mercúrio, Vênus, Terra e Marte, nesta ordem de distância crescente ao Sol.
- Assim, o planeta Vênus está mais próximo do Sol do que a Terra.
- E quão mais próximo?
- Esta pergunta foi respondida muitos séculos atrás, sem naves espaciais. Apenas com uma luneta e a trigonometria.
- Pode explicar como?
- O planeta Vênus aparece com frequência logo após o pôr do sol ou um pouco antes do nascer do sol. E é muito brilhante.
- Assim, os astrônomos observaram o planeta na sua fase de meio planeta.
- Como assim? Tipo meia lua? Minguante ou crescente?



- Isso mesmo. Daqui da Terra, observamos fases em Vênus parecidas com as fases da Lua.
- É bom lembrar que os planetas não têm luz própria. Eles difundem a luz recebida do Sol.
- Então, quando a fase for, por exemplo, um quarto crescente ou um quarto minguante, observamos um quarto da superfície do planeta que está iluminado e que pode ser visto daqui da Terra?
- Isso mesmo. E, para efeitos de observação, veríamos uma metade do disco do planeta iluminado. E você sabe quando isso ocorre?
- Não faço a menor ideia!
- É fácil ter uma ideia, com um pouquinho de trigonometria! Vamos pensar nos três astros, Sol, Vênus e Terra, como os três vértices de um triângulo. Quando observamos exatamente a metade do disco do planeta Vênus, podemos concluir que o triângulo formado é um triângulo retângulo, com o ângulo reto, ou seja, de noventa graus, bem no vértice onde está Vênus.
- Deixa eu desenhar aqui. Então temos o triângulo retângulo com a Terra, Sol e Vênus; e o ângulo de noventa graus em Vênus.
- Portanto, o segmento de reta que vai da Terra ao Sol vai ser a hipotenusa deste triângulo retângulo.
- Exatamente, Ivone.
- E onde entrou a luneta?
- A luneta foi usada para determinar quando o disco do planeta fica iluminado pelo Sol exatamente pela metade.
- E onde entra a trigonometria?
- Já começou pelo triângulo que abstraímos dos três astros, mas aí os astrônomos, com muito cuidado para não olhar diretamente para o Sol, mediram o ângulo no vértice do planeta Terra.
- Mediram usando um transferidor?
- Um instrumento equivalente, chamado SEXTANTE. E com esta medida, pode-se calcular a tangente deste ângulo.
- E a tangente deste ângulo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.
- Isso mesmo, Ivone. Assim, eles descobriram a RAZÃO entre as distâncias de Vênus ao Sol e da Terra ao Sol.
- Então, o raio da órbita de Vênus é aproximadamente 70% do raio da órbita da Terra?
- Correto. E convém chamar atenção que tanto Vênus quanto a Terra têm órbita aproximadamente circulares.



- Na realidade são elípticas, não é professor?
- Sim, Ivone. Em geral, as órbitas dos planetas são elípticas. Mas Vênus é o planeta em que a elipse da órbita é a mais próxima de um círculo. E a elipse da órbita da Terra é relativamente pouco alongada. É praticamente um círculo também.
- Então, podemos dizer que as órbitas de Vênus e da Terra são APROXIMADAMENTE círculos concêntricos com o Sol no centro.
- Retomamos a conclusão do bloco anterior de que as órbitas de Vênus e da Terra são APROXIMADAMENTE círculos concêntricos com o Sol no centro. E o raio do círculo da órbita de Vênus é zero vírgula sete vezes o raio da órbita da Terra.
- Sabemos, pela teoria de Newton ou pelas observações de Kepler, que os planetas em órbitas circulares de raios menores viajam mais rápido do que os planetas mais distantes do Sol em órbitas circulares de raios maiores.
- Mais precisamente, o quadrado da razão entre os períodos das órbitas é igual ao cubo da razão entre os raios das órbitas.
- Um período é o tempo de revolução completa em torno do Sol. No caso da Terra, é um ano.
- Sim, por definição. E agora a gente sabe a razão entre os raios, que é zero vírgula sete. Então, se a gente elevar zero vírgula sete ao cubo e tirar a raiz quadrada, vai encontrar a razão entre o período da órbita de Venus e o período da órbita da Terra.
- Fazendo as contas com a minha calculadora eu obtenho (*fala rápido como estivesse calculando*) 0,7 ao cubo: 0,343; raiz quadrada disto; APROXIMADAMENTE zero vírgula cinco nove. Isso é, o ano de Vênus é cinquenta e nove por cento do ano da Terra. (*Fala rápido de novo*) multiplicando 59% por 365 dá uns (*fala normal*) duzentos e quatorze dias.
- Humm, mas a enciclopédia diz que o ano venusiano tem duzentos e vinte e quatro vírgula sete dias. Onde está o erro?
- Excelente observação. Esta diferença apareceu porque fizemos várias aproximações antes de concluirmos que a razão entre os raios das órbitas era zero vírgula sete, isto é, só consideramos UM algarismo significativo. Se estivéssemos fazendo um trabalho científico profissional, deveríamos expressar os resultados com mais algarismos significativos e sempre lembrar das margens de erros das observações.



- Então, para sermos consistentes, teríamos que usar apenas um algarismo nas nossas contas?
- Exatamente! A informação seria bastante crua, mas seria mais consistente e chegaríamos à conclusão que o ano venusiano teria duas centenas de dias terrestres em comparação às quatro centenas de dias do nosso ano.
- Humm? Acho que entendi, mas isto fica para a turma e o professor discutirem com mais calma. O que é interessante é que Vênus é o astro mais brilhante que vemos no céu, logo após o Sol e a Lua.
- Sim, é muito brilhante. A magnitude de Vênus varia em função da sua posição relativa do trio Sol, Terra e Vênus, e pode chegar a MENOS quatro vírgula seis.
- Magnitude negativa? É mais brilhante?
- Sim, Henrique. A magnitude, melhor dizendo, magnitude aparente é o termo usado até hoje para classificar os astros celestes em termos de brilho.
- E por que o negativo é mais brilhante?
- Esta é uma história muito interessante e tem a ver com os logaritmos.
- Eu sabia que o professor iria colocar matemática na astronomia.
- De fato, Ivone, a matemática e as descobertas da astronomia foram grandes aliadas em termos de conhecimento. A história é a seguinte: Hipparchus da Grécia antiga classificou as estrelas em termos de brilho aparente. Logo depois do pôr do sol, as primeiras estrelas que se tornam visíveis a olho nu são de primeira classe. Depois de algum momento, nós e o Hipparchus conseguimos ver mais algumas estrelas, e essas seriam de segunda classe. E assim por diante.
- Mas é lógico! Faz muito sentido! Ao ficar mais escuro, a gente consegue ver as estrelas mais fracas.
- Você foi ao ponto Henrique! Hipparchus fez um catálogo de estrelas com esta classificação, um pouco subjetiva e dependente das condições de observações.
- Então, o conjunto das estrelas seria dividido em classes. Primeira classe, segunda classe, etc. E as classes com maiores números seriam menos brilhantes. Não é isso?
- Muito bem, Ivone. Infelizmente o termo em latim para esta classificação acabou sendo traduzido para magnitude e se manteve a numeração crescente das classes.

- Ah, então estrelas com alta magnitude aparente na realidade têm baixa luminosidade aparente. Que interessante!
- Isso mesmo! Com o avanço da astronomia, os astrônomos desenvolveram instrumentos para medir luminosidade das estrelas, mas mantiveram a classificação e a nomenclatura de Hipparchus. E os instrumentos de observação são calibrados pelo logaritmo. Historicamente, o principal instrumento ótico é o próprio olho humano, que tem sensibilidades à luz em escala logarítmica.
- Como assim? O olho faz as contas com logaritmo?
- Bem, em certo sentido, sim! O globo ocular recebe luminosidade com amplas faixas de intensidade e ajusta suas sensibilidades por uma escala logarítmica. Isto é um fato da natureza!!
- Mas professor, todo logaritmo é calculado em uma certa base. E qual seria a base deste logaritmo? Base dez ou base natural?
- Nem uma nem outra. A base foi escolhida para coincidir com o catálogo de Hipparchus o melhor possível. E a base é dois vírgula quinhentos e doze (2,512).
- Uma base maior que dois e menor que o número de Euler (*lê-se Óiler*)! Uma base bem diferente, não é?
- É! Esta base é o resultado de um ajuste numérico ao catálogo histórico. O importante é que estrelas de magnitudes UM e DOIS têm brilhos na razão DOIS VÍRGULA CINCO, UM, DOIS.
- Deixa ver se eu entendi: uma estrela de magnitude QUATRO é aproximadamente duas vezes e meia MAIS brilhante que uma de magnitude CINCO?
- Exatamente. Fazendo as contas, uma estrela de magnitude SEIS tem aproximadamente um centésimo do brilho aparente do que uma estrela de magnitude UM.
- Eu acho melhor pensar que a estrela da classe UM é cem vezes mais brilhante que a estrela de classe SEIS.
- Tá certo, pode-se pensar assim também. O olho nu pode enxergar no máximo estrelas de magnitude aparente SEIS.
- E voltando a Vênus, que pode ter magnitude de MENOS quatro vírgula seis, podemos comparar com as estrelas de classe SEIS.
- A diferença de magnitude seria SEIS MAIS QUATRO VÍRGULA SEIS, isto é, DEZ VÍRGULA SEIS.
- Então a base DOIS, VÍRGULA CINCO, UM DOIS elevada a DEZ VÍRGULA SEIS dá ... mais de DEZESSETE MIL.



- Mais de dezessete mil vezes brilhante! Vênus é um grande astro perto das outras estrelinhas!
- É isto mesmo, em termos de brilho aparente, só perde para o Sol e a Lua.
- Bem gente, o tema é sobre Vênus é apaixonante, mas o programa de hoje chega ao seu final, sem tempo para o teorema, a piada nem a frase do programa. Mas acho que as informações já foram muito ricas. Obrigado, Professor Leumas!
- O prazer é todo meu!
- Tchau pessoal. Paz e amor pra todos!

Sugestões de atividades

Antes da execução

Este programa é interdisciplinar com vários conteúdos que o professor pode aproveitar para o seu programa escolar: mitologia, astronomia de estrelas e dos planetas, órbita de planetas, trigonometria e função



logaritmo. Assim, dependendo do assunto de preferência para ser tratado, o professor pode fazer uma revisão dos temas abordados no programa.

Vênus – a deusa do amor

Na mitologia romana, Vênus é a deusa do amor, da beleza e da fertilidade. Há relações culturais com a mitologia grega na figura da deusa Afrodite que é bela e astuta. Veja ao lado a foto da escultura em mármore com dois metros de altura. A estátua “Vênus de Milo” é de 130 a.C. e está no Museu do Louvre, em Paris.

Vênus – o planeta

Vênus também é conhecido pelo nome de estrela-d’alva ou do amanhecer, ou estrela da tarde porque está razoavelmente próximo ao Sol e, assim, para observadores da Terra, o planeta vai



aparecer no horizonte um pouco antes ou um pouco depois de o sol nascer ou se por. Durante o dia não o vemos porque o Sol é muito brilhante.

Vênus é o planeta de maior brilho aparente para a gente terrestre. Talvez por essa razão os antigos associaram a beleza dessa “estrela” à sua deusa correspondente.



Figura 1 O planeta Vênus

Vênus, assim como a nossa Lua e o planeta mais próximo do Sol, Mercúrio, tem fases, isto é, vemos daqui, com a ajuda de um telescópio simples ou binóculo, algumas partes do planeta iluminadas dependendo da nossa posição relativa ao Sol e a Vênus.

O tamanho e a densidade de massa de Vênus e da Terra são similares, assim como a sua constituição e gravidade. No entanto, a atmosfera de Vênus comporta temperaturas e pressões altíssimas em relação às da Terra.

Desenhe no quadro o triângulo Sol-Vênus-Terra. Desenhe esses astros como bolinhas de mesmo tamanho. Ligue as bolinhas por retas paralelas (raios do sol) para mostrar que quando Vênus está no vértice do ângulo reto então ele vai ser visto em quarto minguante ou crescente daqui da Terra.

Durante a execução

Escreva no quadro os nomes e os dados numéricos mencionados no programa à medida que eles forem falados.

A luneta mencionada no programa foi utilizada por Galileu e Kepler, há quase cinco séculos, os quais confirmaram a observação das fases de Vênus.

Depois da execução

O professor, então, pode desenvolver o conteúdo abordado no programa como a seguir.

O primeiro objetivo do programa é mostrar como estimar a razão entre os raios das órbitas de Vênus e da Terra. Assumindo que ambas as órbitas sejam muito bem aproximadas por circunferências de raios R_v e R_t respectivamente, os astrônomos antigos estabeleceram um triângulo retângulo, com o ângulo reto em Vênus, quando a fase observada é exatamente (com os erros observacionais) o da meia fase. Da Terra, com o devido cuidado de não olhar diretamente para o Sol, mede-se o ângulo β . Veja a ilustração abaixo.

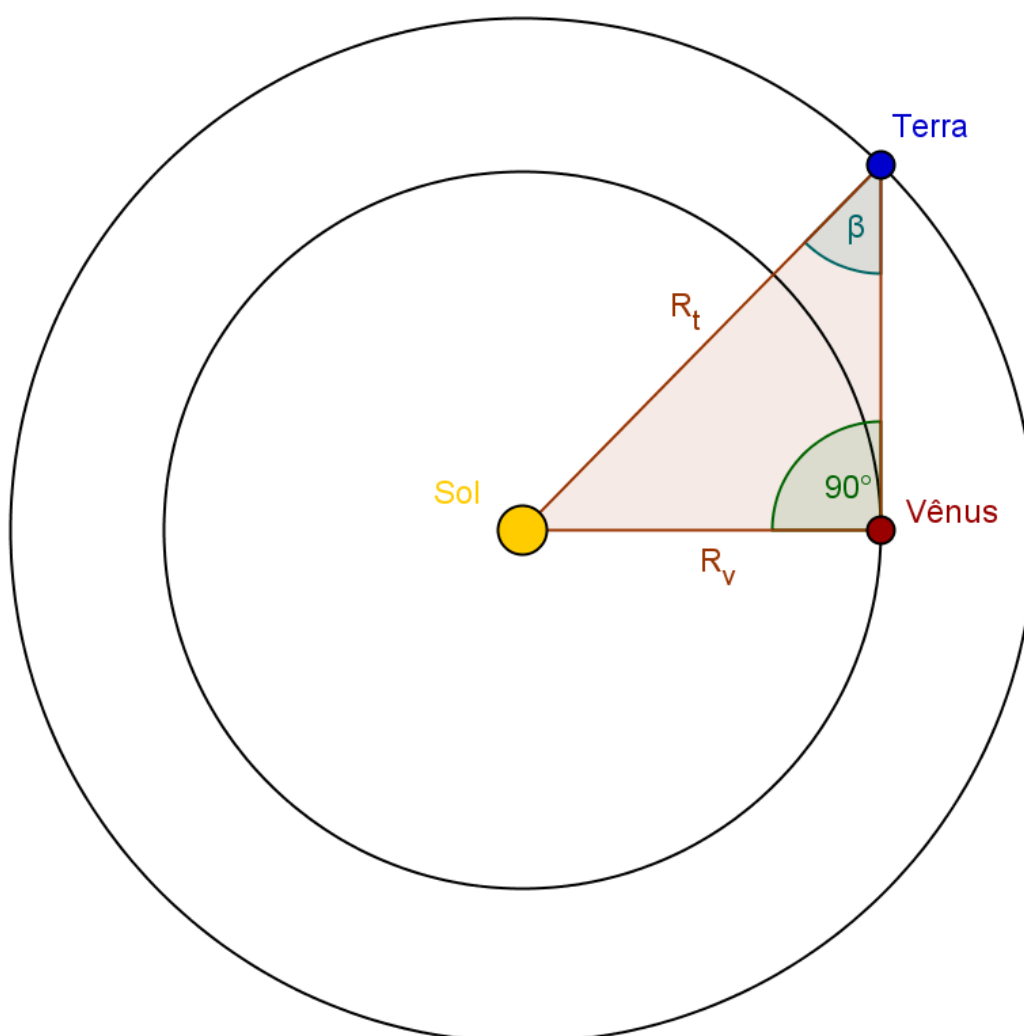
As observações foram tais que o cosseno do ângulo β , isto é, a razão entre os raios R_v e R_t é

$$\frac{R_v}{R_t} = \cos(\beta) = 0,7$$

Isso corresponde a $\beta \cong 45,6^\circ$. Considerando que a Terra gira em torno de si própria 360° em 24 horas, concluímos que o Sol tem uma



velocidade angular aparente de 15° por hora. Assim, para observar o ângulo β em discussão, desprezando a velocidade própria de Vênus, bastaria ter um relógio para medir o tempo entre o pôr do Sol e o pôr de Vênus, ou o nascer de Vênus e o nascer do Sol. Pelas medidas, isso corresponde aproximadamente a três horas, para essa configuração de um triângulo retângulo.



O programa aborda também os períodos de revolução dos planetas. Para isso, menciona a lei de Kepler, que pode ser resumida da seguinte forma:

$$\left(\frac{P_v}{P_t}\right)^2 = \left(\frac{R_v}{R_t}\right)^3$$

onde P_v/P_t é a razão entre os períodos de revolução de Vênus e da Terra. Considerando a medida aproximada, concluímos que

$$P_v = (0,7)^{3/2} \cong 0,58566 \text{ ano}$$

Em outras palavras, obtemos que o período de revolução de Vênus em torno do Sol é de 213,8 dias. Mas não é esse o valor dado pelos astrônomos - a razão é que consideramos a observação 0,7 com pouca precisão, ou seja, só tem um dígito significativo. Para ser consistente, devemos fazer as contas com apenas um dígito significativo - qualquer dígito extra é perdido no erro da primeira observação. Assim, teríamos 0,6 do ano terrestre, isto é, da ordem de duas centenas de dias ou sete meses (ambas afirmações têm apenas um dígito significativo).

Algumas características de Vênus estão resumidas abaixo e podem ser utilizadas para novas pesquisas ou discussões:

- Raio de Vênus é 0,95 do raio da Terra;
- A massa de Vênus é 0,82 da massa da Terra;
- O raio de órbita de Vênus é 0,72 do da Terra;
- O período de órbita de Vênus é de 225 dias terrestres;
- O período de rotação de Vênus corresponde a 243 dias terrestres no sentido oposto ao da rotação da Terra.

Finalmente, o professor Leumas fala da medida de luminosidade aparente das estrelas e dos astros. A luminosidade de Vênus pode chegar a -4,6.

A magnitude luminosa aparente é uma escala logarítmica da seguinte forma (conhecida por fórmula de Pogson):

$$m = -\left(\frac{5}{2}\right) \log_{10}(F)$$

onde a grandeza F é um fluxo de luminosidade dos astros em relação a algum padrão de luminosidade.

O importante a ser ressaltado é que a escala é logarítmica e podemos usar uma identidade para reescrever a expressão como foi falada no programa, a saber (vamos usar $x=-m$ para evitar confusão com o sinal negativo):

$$x = \left(\frac{5}{2}\right) \log_{10}(F) = \log_{10}\left(F^{\left(\frac{5}{2}\right)}\right) \Leftrightarrow F^{\left(\frac{5}{2}\right)} = 10^x$$

A última igualdade pode ser reescrita como $F = (10^x)^{\left(\frac{2}{5}\right)} = \left(10^{\left(\frac{2}{5}\right)}\right)^x$, e assim podemos escrever

$$m = -\log_{10^{\left(\frac{2}{5}\right)}} F = -\log_{2,512} F$$

Isto é, usamos a base $10^{\left(\frac{2}{5}\right)} \cong 2,512$ para o logaritmo e podemos dizer que a magnitude aparente é a potência negativa da base $10^{\left(\frac{2}{5}\right)}$. Notem que essa expressão foi estabelecida e ajustada numericamente a partir de um catálogo observacional, o de Hipparchus (ou apenas Hiparco), com 850 estrelas [veja Verchenko e Silveira (2010)]. Provavelmente foi esse mesmo Hiparco quem introduziu a divisão do círculo em 360° em torno de 180 a.C.

Podemos dizer que o nosso olho faz uma correção logarítmica da luminosidade. E isto é muito interessante, pois assim percebemos uma amplitude de luminosidade enorme. Ajuste semelhante é feito para a nossa audição - observe que o nível de som é dado em decibéis que também é uma escala logarítmica. Não é o caso da sensação de calor percebida na pele, por exemplo: o contato da pele é tolerável para superfícies que tenham temperaturas mais ou menos entre 10°C e 50°C apenas - em termos de temperatura física absoluta, significa uma estreita faixa entre 280 e 320 Kelvins.

Estudos mais detalhados sobre a percepção visual indica que a sensibilidade do olho humano à luminosidade é dada por uma lei de potência, a saber $m_{pot} \cong \frac{5,56}{\sqrt{F}} + 0,444$.

Problema

As magnitudes de luminosidade aparente máximas de Vênus e da Lua são, respectivamente, -4,6 e -12,7. Quanto a Lua é mais brilhante (luminosa) do que Vênus, considerando essas magnitudes?

Solução

Podemos escrever as seguintes equações:

$$-4,6 = m_V = -\log_{2,512}(F_V) \quad \text{e} \quad -12,7 = m_L = -\log_{2,512}(F_L).$$

Portanto, a diferença nos fornece a seguinte relação:

$$12,7 - 4,6 = \log_{2,512}(F_L) - \log_{2,512}(F_V) = \log_{2,512}\left(\frac{F_L}{F_V}\right)$$

Onde usamos uma identidade de logaritmo na mesma base, a saber, que o logaritmo de uma divisão é a diferença dos logaritmos. Agora, usando o antilogaritmo, isto é, a função exponencial, obtemos que

$$\left(\frac{F_L}{F_V}\right) = (2,512)^{8,1} \cong 1738$$

Concluimos então que a Lua é mil setecentas vezes mais luminosa do que Vênus. E o nosso olho consegue ver os dois astros!

Desafio

Se a diferença de magnitude é 6, qual é a razão das luminosidades?

Sugestões de leitura

M. Paiva (2002). **MATEMÁTICA: CONCEITOS, LINGUAGEM E APLICAÇÕES**.

Editora Moderna. Vol 1, caps 23 e 30.

H. Eves (2002). **INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**. Editora da Unicamp, p.202.

L. Vertchenko e T. A. Silveira (2010), *Exercícios envolvendo a magnitude limite no ensino de astronomia*. **ENSAIO PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS**, v.12, n.02, pp.239-256. Página

<http://tinyurl.com/3ow3vws> visitada em Jul/2011.



E. Schulman and C. Cox (1997). *Misconceptions about astronomical magnitudes*. *AM. J. PHYS.* Vol. 65, No. 10

Ficha técnica

Autor *Samuel Rocha de Oliveira*

Revisores *Adolfo Maia Jr. e Carolina Bonturi*

Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*

Coordenação Geral *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas

Reitor *Fernando Ferreira Costa*

Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*

Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diretor *Caio José Colletti Negreiros*

Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*

