Matemática Multimídia

Geometria e medidas

Guia do Professor

Áudio

Um triângulo ímpar

Série **Problemas e Soluções**

Objetivos

1. Usar o teorema de Pitágoras para um problema algébrico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Um triângulo ímpar

Série
Problemas e soluções

Conteúdos
Geometria plana, teorema de Pitágoras.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Usar o teorema de Pitágoras para um problema algébrico.

Sinopse
Dois professores discutem um problema para a prova de matemática e escolhem um problema ímpar.

Material relacionado
Áudios: *Calçadas;*
Experimentos: *Área de quadriláteros;*
Softwares: *Janelas.*

Introdução

Sobre a série

A série *Problemas e Soluções* trata de problemas típicos de matemática do ensino médio contextualizados por uma ficção. Em cada programa um ou dois problemas são interpretados no primeiro bloco de cinco minutos, ao final do qual o leitor é convidado a tentar resolver. No contexto da sala de aula, o professor então tem a oportunidade de discutir os métodos ou as formas possíveis de resolver o problema. O segundo bloco programa apresenta as soluções e alguns comentários ou informações adicionais.

Durante o programa os alunos devem exercitar a sua abstração, pois estarão apenas ouvindo os problemas e as suas soluções, mas é sempre recomendável que os ouvintes façam anotações para melhor aproveitar o conteúdo.

Sobre o programa

O programa apresenta e resolve o seguinte problema:

Seja p um número ímpar maior ou igual a três. Mostrar que os números p, (p2-1)/2 e (p2+1)/2 são medidas de um triângulo retângulo que a área é um número natural, nas unidades de comprimento e área apropriadas.

Para resolver o problema, os alunos devem perceber que $(p^2+1)/2>(p^2-1)/2>p$. A primeira desigualdade é óbvia. A segunda desigualdade é confirmada assim:

$$(p^2-1)/2 > p \Leftrightarrow p^2-2p-1>0 \Leftrightarrow (p-1)^2>2 \Leftrightarrow p>1+\sqrt{2}$$

Assim, a desigualdade é válida para *p* natural tal que $p \geq 3$.

E o teorema de Pitágoras diz que se o quadrado do maior lado de um triângulo for igual à soma dos quadrados dos demais lados, o triângulo é retangular, sendo o maior lado a sua hipotenusa, e os demais lados são os catetos.

A área de um triângulo retângulo é a metade do produto dos comprimentos de seu cateto. Assim a área deste triângulo é

$$\mathrm{A} = p(\mathrm{p}^2 - 1)/4 \Leftrightarrow \mathrm{A} = p(\mathrm{p} - 1)(\mathrm{p} + 1)/4$$

Mas por hipótese *p* é um número ímpar, isto é *p=2k+1*, para *k* natural. Então

$$\mathrm{A} = p(\mathrm{p} - 1)(\mathrm{p} + 1)/4 = (2k + 1)2\mathrm{k}(2\mathrm{k} + 2)/4 = (2k + 1)\mathrm{k}(\mathrm{k} + 1)$$

Portanto a área é um número natural, nas unidades apropriadas. Aliás, a área vai ser dada por um número par, pois *k(k+1)* é sempre par, para *k* natural.

Sugestões de atividades

Antes da execução

O programa é de conteúdo simples, associados ao conjunto dos números ímpares, pares e ao teorema de Pitágoras. Professor se julgar conveniente lembrar o teorema de Pitágoras, pode apresentar alguma de suas demonstrações antes da execução do programa.

Depois da execução

Sugerimos uma pesquisa aos trios de Pitágoras que consistem em conjuntos de três números naturais tais que a soma dos quadrados de dois deles é o quadrado do terceiro. Há várias propriedades interessantes destes trios. E muitos destes trios podem ser gerados por uma fórmula atribuída a Euclides:

Fórmula de Euclides
Considere dois números naturais *m* e *n*, $m>n$. Então $a=m^2-n^2$, $b=2mn$ e $c= m^2+n^2$, formam um trio de Pitágoras.

Veja alguns trios:

(3 , 4 , 5)	(5, 12, 13)	(7, 24, 25)	(8, 15, 17)
(9, 40, 41)	(11, 60, 61)	(12, 35, 37)	(13, 84, 85)
(16, 63, 65)	(20, 21, 29)	(28, 45, 53)	(33, 56, 65)
(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(48, 55, 73)	(65, 72, 97)

Agora observe que em todos esses casos, a área do triângulo retângulo associado é exatamente $(m^2-n^2)\times mn$, isto é, também um número natural.

Ficha técnica

Autor *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*