Matemática Multimídia

Guia do Professor

Áudio

Tamanho da Terra

Série **Problemas e Soluções**

Objetivos

1. Mostrar como a circunferência da Terra pode ser calculada, usando trigonometria.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao áudio ao qual este guia se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Tamanho da Terra

Série
Nome da série

Conteúdos
Trigonometria.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Mostrar como a circunferência da Terra pode ser calculada usando trigonometria.

Sinopse
Neste programa, Ptolomeu, Cristóvão Colombo e Eratóstenes discutem um dos maiores feitos da ciência da Antiguidade e um testemunho do poder da Matemática e do engenho humano. O próprio Eratóstenes munido das informações de um papiro antigo e de trigonometria básica, calculou pela primeira vez, com grande precisão, a circunferência da Terra, por volta de 200 a.C.

Material relacionado
Vídeos: *Medindo a Terra, Perdido no globo.*

Introdução

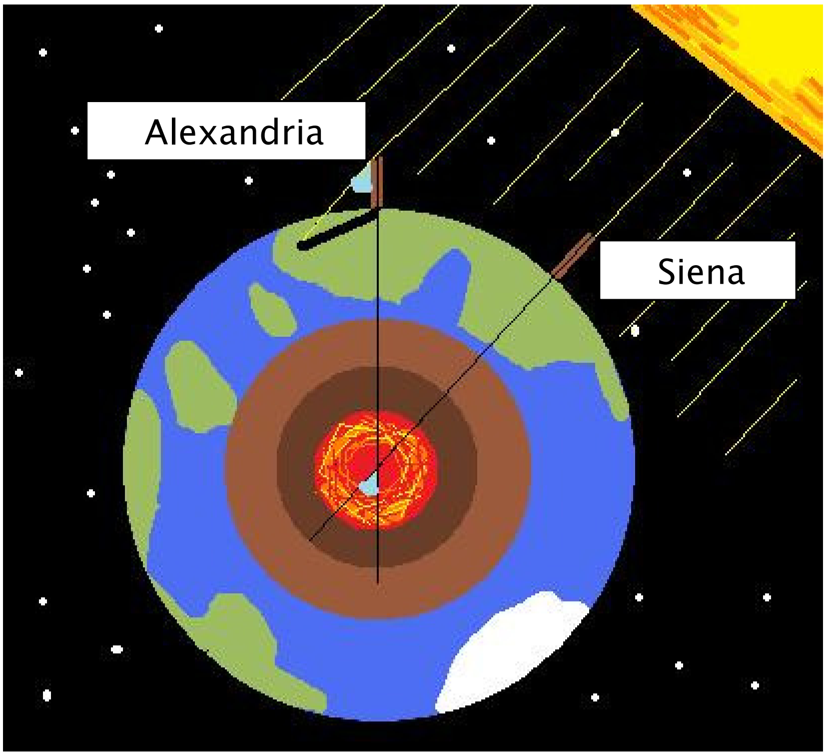
Sobre a série

A série problemas e soluções é uma coleção de programas de áudio cada um deles contendo a apresentação de um problema envolvendo conteúdo da matemática de ensino médio e sua solução. Os programas podem ser usados pelo professor de matemática para introduzir um assunto e motivar seu estudo, ou como encerramento do conteúdo mostrando uma aplicação do que foi ensinado.

Sobre o programa

Neste Programa, Ptolomeu, Colombo e Eratóstenes discutem no paraíso as diferentes estimativas para a circunferência da Terra e a precisão de cada uma delas. Na conversa aprendemos que a descoberta da América se deve em parte ao erro de Ptolomeu, que baseado em imprecisas observações astronômicas, estimou a circunferência da Terra em 27 mil quilômetros, muito menor que a realidade, o que ajudou Cristóvão Colombo a convencer seus financiadores da viabilidade da circunavegação da Terra, empreitada que levou ao descobrimento da América.

Mas o feito mais impressionante coube ao grego Eratóstenes. Ele era bibliotecário na célebre Biblioteca de Alexandria, que foi a maior biblioteca, centro de pesquisa e de ensino do mundo antigo. Lá entre milhares de pergaminhos repletos de informações vindas de todas as partes do mundo então conhecido, Eratóstenes encontrou um pergaminho que dizia que na cidade de Siena, ao sul de Alexandria, no dia 21 de junho ao meio dia era possível ver o fundo de um poço e os objetos não produziam sombra. Mas o mesmo não acontecia em Alexandria.



Então Eratóstenes mandou que um escravo contasse os passos de Alexandria até Siena, para saber a distância entre as duas cidades que é de aproximadamente 800 Km. Além disso, devido à grande distância entre os dois corpos, os raios de sol que chegam à Terra são praticamente paralelos.

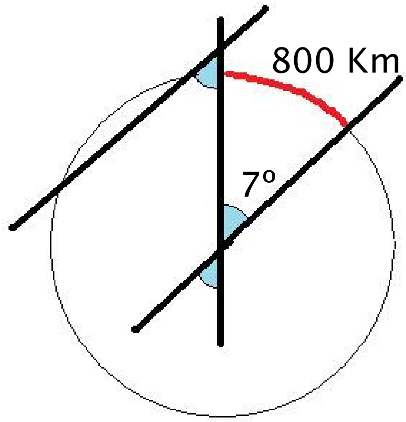
Portanto o ângulo indicado na ilustração acima, que foi medido ($\approx 7^o$), formado entre a estaca de Alexandria e o raio de sol nela incidente é igual ao ângulo formado no centro da Terra entre os raios passando pelas duas estacas no desenho (pelo teorema de Thales – veja a ilustração abaixo). Desta forma o problema de calcular a circunferência da Terra se reduz a simples trigonometria.

Então $7^o \approx \pi/25$ rad, correspondem a 800 Km. Sabemos que na circunferência

comprimento= arco (em rad)×raio.

Ou seja,

raio =comprimento/ arco.



Logo o raio da Terra é

$$raio=800/(\pi/25)= 25\times800/\pi =20.000/\pi \text{ Km}.$$

Ora, o comprimento de um circunferência é $2\pi \times$ raio, logo a circunferência da Terra é de 40.000 Km. Hoje sabe-se que a circunferência da Terra é de 40.072 Km (no Equador), ou seja o erro de Erastótenes foi bem pequeno, principalmente considerando as ferramentas de que ele dispunha para fazer medidas, 2200 anos atrás.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Para que entendam melhor o cálculo apresentado no programa é importantante que os estudantes conheçam o teorema de Thales e a fórmula para calcular o comprimento de arco.

O professor pode então apresentar os personagens da história que são:

Ptolomeu: foi um cientista grego que viveu em Alexandria, uma cidade do Egito. Ele é reconhecido pelos seus trabalhos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia. Realizou também trabalhos importantes em óptica e teoria musical.

Cristóvão Colombo: Foi um navegador e explorador europeu, responsável por liderar a frota que alcançou o continente americano em 12 de Outubro de 1492, sob as ordens dos Reis Católicos de Espanha, no chamado descobrimento da América. Empreendeu a sua viagem através do Oceano Atlântico com o objetivo de atingir a Índia, tendo na realidade descoberto as ilhas das Caraíbas (Antilhas) e, mais tarde, a costa do Golfo do México na América Central.

Eratóstenes: foi um matemático, bibliotecário e astrônomo grego. Nasceu em Cirene, Grécia, e morreu em Alexandria. Estudou em Cirene, em Atenas e em Alexandria, onde trabalhou na famosa biblioteca de Alexandria.

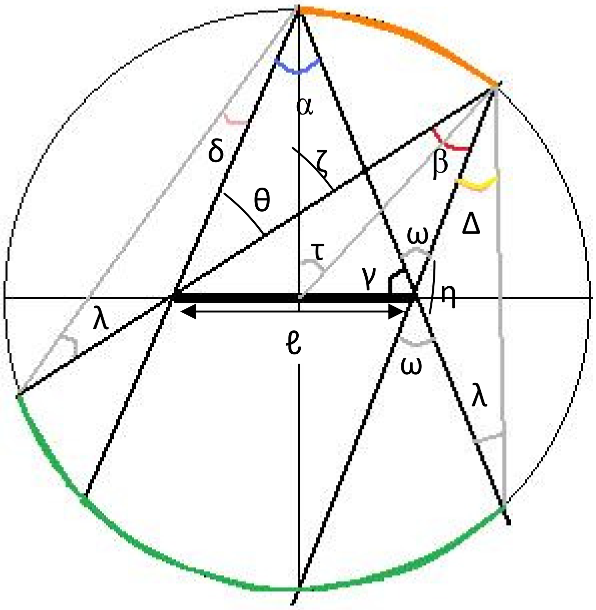
Antes da execução o professor pode perguntar aos alunos que tipo de equipamentos e métodos que eles acham que são empregados para calcular o tamanho da Terra. Será que são necessários: GPS, computadores, satélites, foguetes, telescópios, hodômetros (equipamento usado para medir distâncias percorridas)...?

Depois da execução

Eratóstenes assumiu em seus cálculos que os raios do Sol que atingem a Terra são paralelos. Vejamos por que essa hipótese não leva a um grande erro nas contas. Faremos isso em duas partes.

Ângulos circunscritos.
Estamos supondo que todos os raios de Sol partem de pontos que estão a mesma distância da Terra, 1 u.a (unidade astronômica=150 milhões de Km). Ou seja, partem de pontos dispostos em uma circunferência de raio 1 u.a. centrada na Terra. Neste tópico provaremos que dado um segmento ℓ, centrado num diâmetro da circunferência e um triângulo isósceles tendo ℓ como um lado e um vértice na circunferência, de ângulo α, então qualquer triângulo tendo ℓ

como lado e um vértice na circunferência, possui neste vértice um ângulo menor do que α.



Nosso objetivo é então, provar que $\alpha > \beta$.

Primeiramente observe que $\underline{\alpha+\delta=\beta+\Delta}$ pois a ambos os lados desta igualdade corresponde o arco verde.

Vemos também que $\lambda = \tau/2$ pois τ é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito λ.

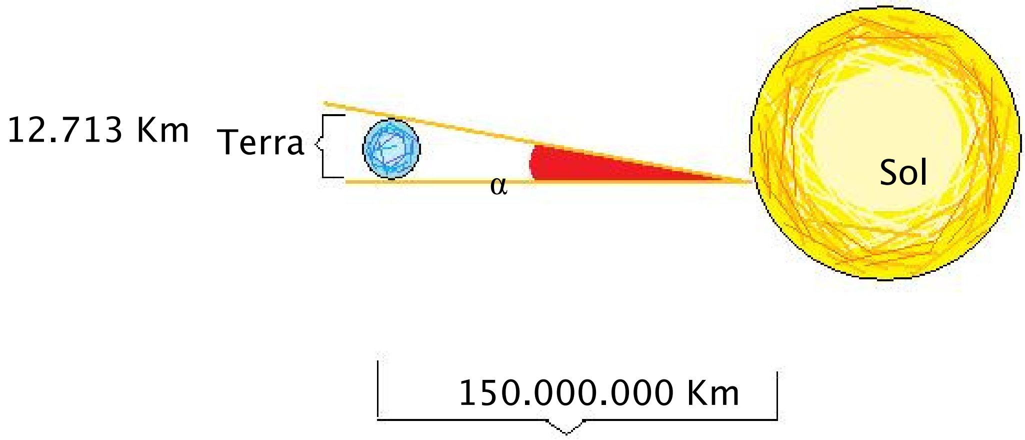
Usando o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, verifica-se que $\zeta = \alpha/2 + \theta$.

Note que um raio divide o ângulo β em dois, β_1 acima e β_2 abaixo. Vê-se no desenho que $(\tau + 90°) + (\gamma - \theta) + \beta_1 = 180°$, logo $\tau = 90° - \gamma + \theta - \beta_1$. Segue que $\omega = 180 - (90 - \tau + \gamma) - \beta_2 = 180° - \gamma + \theta - \beta$.

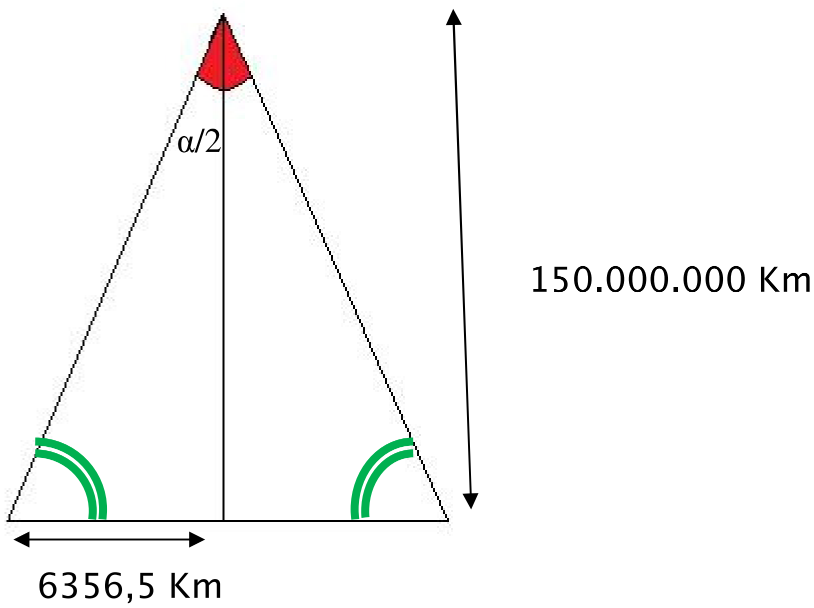
No desenho vemos que $\Delta = 180° - (180° - \omega) - \tau/2 = \omega - \tau/2$, e $\delta = \theta - \tau/2$. Logo, $\Delta - \delta = \omega - \theta = 180° - \gamma - \beta$. Mas γ e β são agudos logo $\Delta - \delta > 0$. Segue daí e da equação sublinhada acima que $\alpha > \beta$.

Raios de Sol.

Calcule o ângulo α em vermelho na figura abaixo, o qual, pela atividade acima é o maior ângulo formado por dois raios solares para que ambos atinjam a Terra (aproximadamente).



Solução: Temos o seguinte triângulo isósceles:



$$\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\,(6356{,}5/150.000.000) \approx 8.5 \times 10^{-5}.$$

Para fazer a conta acima pode-se usar uma calculadora científica ou observar que a função tg(α) é aproximadamente igual a α para arcos pequenos, em radiano. Concluímos assim que dois raios de Sol que atingem a Terra são quase paralelos.

Sugestões de leitura

G. Iezzi(2004). Fundamentos de Matemática Elementar, vol 3 e 9,Atual Editora.

Ficha técnica

Autor *Alison Melo*
Revisão *Otilia W Paques*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenação Geral *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*