



Matemática
Multimídia



Guia do Professor

Áudio

Dados não-transitivos

Série Problemas e soluções

Objetivos

1. Resolver uma situação problema que envolve dado, com a aplicação de conceitos básicos de probabilidade;
2. Apresentar o conceito, exemplos e contra-exemplos de transitividade.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao áudio ao qual este guia se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 



UNICAMP

Dados não-transitivos

Série

Problemas e Soluções.

Conteúdos

Probabilidade; Independência de eventos; Transitividade.

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivos

1. Resolver uma situação problema que envolve dado, com a aplicação de conceitos básicos de probabilidade;
2. Apresentar o conceito, exemplos e contra-exemplos de transitividade.

Sinopse

Lucas e Camila disputam um jogo com dados não-convencionais, em que os números das faces variam de dado para dado. Para aumentar as suas chances de vitória, Camila utiliza o conceito matemático de probabilidade. Lucas aprende que a relação entre os eventos não é transitiva.

Material relacionado

Experimentos: *Apostas no relógio, Baralho e torradas*;
Softwares: *Probabilidade com urnas, Explorando o jogo do máximo*;
Vídeos: *Uma aventura RPG*.

Introdução

Sobre a série

A série *Problemas e Soluções* trata de problemas típicos de matemática do ensino médio contextualizados por uma ficção. Em cada programa um ou dois problemas são interpretados no primeiro bloco de cinco minutos, ao final do qual o leitor é convidado a tentar resolver. No contexto da sala de aula, o professor então tem a oportunidade de discutir os métodos ou as formas possíveis de resolver o problema. O segundo bloco do programa apresenta as soluções e alguns comentários ou informações adicionais.

Durante o programa os alunos devem exercitar a sua abstração, pois estarão apenas ouvindo os problemas e as suas soluções, mas é sempre recomendável que os ouvintes façam anotações para melhor aproveitar o conteúdo.

Sobre o programa

Na ficção, Lucas e Camila jogam um jogos de dados com 3 dados honestos e não convencionais.

- O dado A possui duas faces com o número 10 e quatro com o número 1.
- O dado B possui seis faces com o número 4.
- O dado C possui quatro faces com o número 6 e duas com o número 0.

O jogo consiste em cada jogador escolher um dos 3 dados e jogá-lo 10 vezes seguida. Ganha quem conseguir obter a face com o maior número a maior parte das vezes. Camila, sendo uma boa entendedora de matemática, consegue aumentar suas chances de vitória, através do uso da probabilidade e assim ganhar o jogo 3 vezes seguidas.

Os alunos devem notar que, depois que os dados foram escolhidos, o resultado do dado de Lucas independe do número que sai no dado de Camila. Logo, eles são eventos independentes. Dessa forma, a probabilidade conjunta da intersecção desses dois eventos é dada pelo produto da probabilidade simples de cada um deles, ou seja, se A e B são 2 eventos independentes quaisquer, temos que:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Na primeira partida, Lucas escolheu o dado A e então a Camila escolheu o B. Os alunos devem perceber que os resultados possíveis são:

- Lucas: 10 ou 1, com a probabilidade de $2/6=1/3$ de sair 10 e de $4/6=2/3$ de sair 1.
- Camila: a probabilidade de sair 4 em seu dado é sempre de $6/6=1$.

Logo, os únicos resultados possíveis são 1 e 4 ou 10 e 4. Vamos chamar de L, o espaço amostral de Lucas e K, o de Camila. Assim temos as seguintes probabilidades:

$$P(L=10 \cap K=4) = \frac{1}{3} * 1 = \frac{1}{3}$$

$$P(L=1 \cap K=4) = \frac{2}{3} * 1 = \frac{2}{3}$$

Dessa forma, Camila teria mais chances de ganhar do que Lucas. Jogando 10 partidas, é muito provável que Lucas ganhou 3 vezes e a Camila ganhou 7 vezes.

Na segunda partida, Lucas escolheu o dado C, enquanto Camila escolheu o A. Note que $L=\{0,6\}$ com $P(L=6)=2/3$ e $P(L=0)=1/3$, enquanto $K=\{1,10\}$ com $P(K=1)=2/3$ e $P(K=10)=1/3$, logo:

$$P(L=0 \cap K=1) = \frac{1}{3} * \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$



$$P(L=0 \cap K=10) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(L=6 \cap K=1) = \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(L=6 \cap K=10) = \frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Note que Lucas ganha apenas quando sair 6 e a Camila 1, com probabilidade de $\frac{4}{9}$. Nos outros casos a Camila ganha com probabilidade complementar $\frac{5}{9}$ ou equivalentemente a soma das probabilidades $\frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9}$. É provável que, nas dez partidas, a Camila ganhou seis vezes e o Lucas quatro vezes.

Na terceira partida, Lucas escolheu o dado B, enquanto Camila escolheu o C. No momento da escolha, Lucas achou que fosse ganhar, uma vez que o dado B ganhou do A, que por sua vez ganhou do C. Porém, na prática, isso não ocorreu e Camila ganhou novamente o jogo. Para entender o motivo, primeiramente note que $L=\{4\}$ com $P(L=4)=1$, enquanto $K=\{0,6\}$ com $P(K=0)=\frac{1}{3}$ e $P(K=6)=\frac{2}{3}$, logo:

$$P(L=4 \cap K=0) = 1 * \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(L=4 \cap K=6) = 1 * \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Dessa forma, as chances de Camila ganhar eram de $\frac{2}{3}$, dado que o número 6 é maior que o número 4.

O erro do Lucas dessa vez foi não perceber o resultado desse jogo de dados não é transitivo, diferentemente da relação de ordem entre os números reais. Isto é, para um conjunto ordenado de forma que $a < b$ e $b < c$, podemos dizer que $a < c$, e a propriedade de transitividade é válida.

No caso do Jogo, vimos que B vence A com $\frac{2}{3}$ de chances e A vence C com $\frac{5}{9}$ de chances. Não podemos daí assumir a transitividade de que



B venceria C com mais chances. Na realidade, nesse caso, é C quem vence B com $2/3$ de chances.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Sugerimos ao professor revisar com os alunos, os conceitos de evento, espaço amostral e probabilidade, dando ênfase a como calcular a probabilidade em eventos simples que envolvam dados e moedas.

Durante a execução

Durante a execução, o professor deve estimular os alunos a determinar e anotar o espaço amostral dos eventos, assim como quais combinações resultam na vitória de Lucas e quais na de Camila.

Depois da execução

Exercício:

Jogam-se dois dados, um com duas faces com o número 2 e quatro faces com o número 5 e outro com duas faces com o número 1, três com o número 3 e uma face com o número 6. Qual deles tem a maior chance de vitória?

Pesquisa:

Procurar na internet o que é conhecido por *paradoxo da votação* no qual nem sempre há transitividade dos escolhidos por votação. Isto é, se candidato A teria mais chances de ganhar do candidato B, e este teria mais chances de ganhar do candidato C, nem sempre podemos concluir que o candidato A teria mais chances de vencer o candidato C.

Sugestões de leitura

P. Meyer (2000). Probabilidade: Aplicações à Estatística. Editora LTC.



W. Feller (1976). Introdução à Teoria das Probabilidades e suas Aplicações, vol I. Editora Edgard Blücher.
Site recomendado: ALEA – Acção Local de Estatística Aplicada, <http://alea-estp.ine.pt>

Ficha técnica

Autor *Pedro Ferraz Villela*

Revisão *Samuel Rocha de Oliveira*

Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*

Coordenação Geral *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas

Reitor *Fernando Ferreira Costa*

Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*

Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diretor *Jayme Vaz Jr.*

Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*

