



Matemática
Multimídia



Guia do Professor



Áudio

Senos

Série Mátema

Objetivo

1. Apresentar as várias etapas do desenvolvimento e aplicação da trigonometria na história da matemática ao longo dos séculos.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao áudio ao qual este guia se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 



UNICAMP

Senos

Série

Mátema

Conteúdos

História da matemática.

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivo

1. Apresentar as várias etapas do desenvolvimento e aplicação da trigonometria na história da matemática ao longo dos séculos.

Sinopse

Na aula de hoje a nossa simpática professora conta a Joãozinho e Sofia a história do seno e da trigonometria. Os principais temas abordados são o desenvolvimento da trigonometria e suas principais aplicações ao longo dos séculos bem como a origem dos nomes usados para as funções trigonométricas.

Material relacionado

Áudios: *Uma ópera complexa*;
Vídeos: *Alice e as relações trigonométricas*;
Softwares: *Ondas trigonométricas*

Introdução

Sobre a série

A série *Mátema* levanta aspectos históricos dos fundamentos da matemática. O contexto da ficção tem o objetivo de tornar o programa interessante para o ensino médio e para adolescentes, uma vez que faz uso do estereótipo do Joãozinho, da Sofia e da professora. Em geral, os assuntos são mais elaborados do que os que são vistos nos programas de ensino médio. No entanto, o programa traz ricas informações e tem o devido cuidado com as definições e conclusões matemáticas.

Sobre o programa

Aqui reproduzimos parte de uma versão do roteiro original do prof. Dicesar Fernandes que deu origem ao programa.

Primeira Parte:

Oi, gente, estamos novamente com vocês, com Joãozinho, aquele menino terrível, com Sofia, aquela aluna aplicada, e nossa gentil e simpática professora para contar mais uma das muitas histórias da matemática.

Hoje vamos contar uma história sombria, cheia de sombras. É a história do seno e da trigonometria.

Professora: Tales de Mileto, que viveu entre 625 a 547 a.C, é considerado o pai da matemática e é significativo que uma das poucas realizações matemáticas atribuídas a Tales, foi um cálculo de sombras. Tales, a primeira personagem associada com matemática no oeste, usou esta habilidade para determinar a altura das pirâmides do Egito.

Sofia: Como ele fez esse cálculo? Isso é verdade ou é lenda?



Professora: Parece ser uma lenda e é relatada mais ou menos assim: Ainda que o rei do Egito admirasse Tales por outras razões, ele particularmente gostava da maneira pela qual mediu a altura da pirâmide sem truque nem instrumento, meramente posicionando seu corpo na extremidade da sombra da pirâmide projetada pelos raios do sol formando então dois triângulos e mostrando que a altura da pirâmide estava para altura do corpo na mesma razão que as respectivas sombras. É a sombra em ação.

Joãozinho: Já vi o Sombra em ação. Agora a sombra, só se for assombração!

Professora: Engraçadinho. Vou fingir que não ouvi. Parece que muitas sociedades antigas baseavam-se na observação das sombras com propósitos religiosos e de agricultura. Colocando-se uma estaca vertical em um terreno plano podiam marcar o mais longo dia do verão e o mais curto dia do inverno. Desta forma podiam planejar o plantio dos alimentos. Existem evidências indicando que Babilônios, Egípcios e Chineses desenvolveram técnicas precisas de observação celeste usando somente uma estaca ou pólo e observando a posição de sua sombra. Este pólo é mais comumente chamado de gnomon, seu nome em grego.

Sofia: Professora, a senhora me desculpe, mas não estou vendo relações entre as sombras com a trigonometria.

Professora: É mais ou menos claro. Você coloca um gnomon de medida conhecida e então mede sua sombra. Veja que você está fazendo medidas em um triângulo, além disso, retângulo. Em grego, triângulo significa trigonon e trigonometria significa trigonon MAIS metria; medida de triângulos. Ou seja, tem tudo a haver.

Joãozinho: Professora, a senhora conhece aquela história onde dois catetos se encontraram num ângulo reto escondidos da hipotenusa?

Professora: Joãozinho, eu não estou interessada em suas brincadeiras! Mas posso contar a história do seno e da sombra.

Sofia: O seno tem sombra?

Professora: Não é a sombra do seno, mas o seno e a sombra.

Joãozinho: Não poderia ser o seno e O Sombra? Ficaria mais horripilante!

Professora: É difícil precisar quando o homem olhou para a esfera celeste e começou a procurar entender o movimento dos astros e das estrelas e usar de forma prática.

Joãozinho: Já sei, foi no tempo de Cabral!

Professora: Não, Joãozinho foi muito antes, muitos e muitos séculos antes.

Joãozinho: E como a senhora sabe?

Professora: Bom, nossos conhecimentos sobre o antigo Egito começaram com o estudo de uma pedra achada no alto Egito em 1799. Nessa pedra havia inscrições em grego, demótico e hieróglifos. Demótico era a língua falada no Egito no tempo de Cleópatra e os hieróglifos era a escrita usada no tempo dos faraós. É curioso que quem achou essa pedra foi um nobre muito rico que acompanhava o imperador Napoleão Bonaparte em suas expedições. Esse nobre era muito culto e conhecia profundamente matemática e física. Ele escreveu um trabalho revolucionário sobre o caráter ondulatório da condução do calor, usando funções trigonométricas em quase todas as páginas. Seu nome era Joseph Fourier. Mas quem começou a tentar decifrar as inscrições foi um jovem chamado Thomas Young, fazendo uma espécie de dicionário. O curioso é que Young foi um dos pioneiros no estudo do caráter ondulatório da luz. Também sabia bastante trigonometria.

Sofia: Então a pedra era sobre trigonometria?

Professora: As inscrições na pedra versavam sobre assuntos religiosos. Foi escrita por volta de 200 anos antes de Cristo, justo o



tempo de Cleópatra. Essa pedra é bem conhecida e vocês já ouviram falar dela certamente: a pedra de Roseta.

Joãozinho: Mas o professor de história falou que a pedra de Roseta foi desvendada por um tal de Champinhão.

Professora: É Champollion, Joãozinho. Sim foi ele que completou os estudos da pedra de Roseta. Mas não deixa de ser curioso é que Fourier e Young entraram na história da pedra e sabiam bastante trigonometria. Além disso, foi o desvendamento das inscrições da Pedra de roseta que abriram o caminho para o conhecimento da matemática na época dos faraós.

Joãozinho: Os faraós sabiam matemática?

Professora: Provavelmente não. Eu sei que é difícil para você, Joãozinho, mas pense um pouquinho e me diga. Você já viu uma fotografia de uma pirâmide, certamente. Você percebeu que a inclinação de cada um dos quatro lados é a mesma? Já imaginou que coisa desengonçada seriam as pirâmides se cada face tivesse uma inclinação diferente? Então, não seria interessante saber como eles conseguiram a mesma inclinação?

Sofia: Já sei! Eles inventaram e usaram trigonometria!

Professora: Dizer que eles inventaram a trigonometria é um exagero. Mas um papiro achado, em 1856, por um escocês chamado Rhind, contém uma coleção de problemas de interesse matemático. Graças aos conhecimentos obtidos no estudo da pedra de Roseta, o papiro foi completamente estudado e traduzido para diversas línguas. O problema de número 56 é o seguinte: Se uma pirâmide tem 250 cúbitos de altura e sua base mede 360 cúbitos, qual é seu seked?

Sofia: O que é isso de seked?

Professora: O papiro não diz. Mas seguindo-se o raciocínio da solução e chegando-se a resposta percebemos que seked é a cotangente do ângulo entre a base da pirâmide e suas faces. Aplicando-se o método descrito no papiro para o cálculo da inclinação

das pirâmides mais conhecidas, Queops, Quefrem e Miquerinos, obtêm-se as inclinações corretas. Conclusão: pelo menos uma trigonometria intuitiva eles deviam conhecer.

Agora é tempo para um intervalo. Enquanto isso pensem no seguinte: o papiro Rhind foi copiado mais ou menos em 1.700 antes de Cristo. Tales viveu por volta de 600 antes de Cristo. Se os egípcios sabiam calcular a inclinação de uma pirâmide, não saberiam calcular a altura?

Segunda Parte:

Professora: Vamos recomeçar nossa história com um grego, que se chamava Hiparco de Rodas. O sobrenome vem do fato de ter vivido na ilha de Rodas. Isto se passou entre 100 a 200 anos antes de Cristo.

Joãozinho: Bem, mais ou menos 1650 anos antes de Cabral! Certo?

Sofia: Olha aí, o Joãozinho já aprendeu a somar!

Professora: Não provoque Sofia. Deixe-me continuar a história. Hiparco olhava para o céu e imaginou um arco entre dois astros. Quis então calcular a distância entre esses astros. Como é difícil medir arcos, resolveu medir a corda que unia os extremos do arco e imaginou um triângulo, em que ele era um dos vértices e origem do ângulo oposto à corda.

Sofia: Ah! Mas como ele podia medir a corda se não conhecia os outros dois lados do triângulo?

Professora: Bom, ele fez uma hipótese: o arco era parte de uma circunferência com raio medindo 3.438 e então elaborou uma tabela com os comprimentos de cordas relativos a vários diferentes ângulos.

Joãozinho: Mas, por que ele escolheu 3.438 e não qualquer outro valor?

Professora: Porque, nesse caso o comprimento da circunferência é 21.600, que é igual a 360 vezes 60. Então, cada minuto de arco corresponde a uma unidade de comprimento da circunferência.

Sofia: Mas como ele fazia essas contas todas, professora?

Professora: As tabelas de Hiparco não sobreviveram e não sabemos como ele fazia as contas. O que sabemos de Hiparco é pelo que outros gregos deixaram escrito.

Sofia: Que outros gregos?

Professora: Entre os anos 85 e 165, depois de Cristo, viveu o maior astrônomo grego: Cláudio Ptolomeu. Escreveu vários livros, mas o mais importante foi *Mathematikos Syntaxis* ou *Coleção Matemática*. Depois essa obra ficou conhecida como *Megisti Syntaxis* ou *Grande Coleção*. Os árabes passaram a chamar a obra de *al-magisti* e acabou sendo traduzida como o *Almagesto*.

Joãozinho: Do que trata esse *Indigesto*?

Professora: Joãozinho! Mais respeito. O *Almagesto* de Ptolomeu trata da visão grega do universo. Esta visão do universo permaneceu aceita por mais de mil anos. O que nos interessa aqui é que Ptolomeu começa com um amplo estudo de trigonometria plana e esférica. Sua intenção era elaborar uma tabela de cordas mais precisa do que a de Hiparco.

Sofia: Então foi o Ptolomeu que criou o seno e o cosseno?

Professora: Não, ele e outros gregos faziam uma trigonometria, que significa medida de triângulos, mas não usavam nomes especiais.

Sofia: Mas como apareceram o seno e o cosseno?

Professora: As tabelas de Hiparco e o *Almagesto* de Ptolomeu foram parar na Índia. Os indianos fizeram tabelas de cordas, mas usando meia corda. Agora, a metade da corda é determinada pela bissetriz do ângulo. Desta forma aparecem naturalmente dois triângulos retos.

Sofia: Olha aí! Os catetos que Joãozinho tanto queria! Professora, mas então foram os indianos que inventaram o seno?

Professora: É, num certo sentido sim. Mas eles chamavam de meia-corda mesmo. O termo seno apareceu muito mais tarde. De qualquer maneira parece que os indianos conheciam as obras de Hiparco e o Almagesto de Ptolomeu.

Sofia: Por que parece?

Professora: O valor do raio e outros detalhes coincidem completamente com os de Hiparco e tem semelhanças com o Almagesto. A contribuição indiana chegou as mãos dos árabes. Além disso, os árabes tiveram acesso a cópias dos trabalhos gregos sobre astronomia.

Joãozinho: Ué! Para andar de camelo precisa saber astronomia?

Professora: O problema é outro Joãozinho. Você tem que saber que depois da morte de Maomé, os árabes se reuniram e formaram um grande império. Este império ia da Espanha até à Índia. Fizeram uma revolução na agricultura e resolveram absorver todo o conhecimento dos gregos e dos indianos. Começaram também a fazer importantes contribuições originais. Por exemplo, criaram a álgebra e os conceitos de sombra direta e sombra inversa e ainda tabelaram as sombras.

Sofia: Mas que história é essa das sombras?

Professora: É o seguinte: os gregos e os indianos só usavam a corda e a meia-corda, que virou seno. Por volta do ano 900, o astrônomo árabe Al-Battani usou não só o seno, mas o complemento do seno: o coseno. Um século depois, por volta do ano 1000, o astrônomo chamado Al-Biruni escreveu uma obra que chamou Tratado Exaustivo das Sombras. Nesse trabalho, Al-Biruni estuda o comportamento da sombra de uma estaca colocada perpendicular a um piso plano e de uma estaca presa perpendicularmente a uma parede. Eram as sombras diretas e reversas. Depois, muito depois, viraram cotangente e tangente.



Sofia: Bom, só está faltando a secante e a cossecante.

Professora: É, mas todas as seis funções trigonométricas aparecem num trabalho de Jabir ibn Aflah. O trabalho é uma crítica ao Almagesto de Ptolomeu e incorpora os conhecimentos árabes. Foi escrito por volta do ano 1100 e 50 anos depois já estava traduzido para o latim.

Sofia: Deve ser difícil traduzir do árabe para o latim. Eu não sei nada de árabe nem de latim.

Professora: Pois é. Justamente na tradução do trabalho de Jabir ibn Aflah é que apareceu o termo seno. Os árabes não deram nomes especiais para as funções trigonométricas. No caso da meia-corda utilizaram a mesma expressão indiana: *jya*. Mas como em árabe são utilizadas somente consoantes, o tradutor viu no texto *jb* e supôs que significava *jaib*. Esta palavra corresponde em latim a *sinus*. O termo tornou-se usual e em português virou seno. O termo cosseno é uma abreviação de complementar do seno. Os outros termos apareceram pouco antes da época de Cabral.

Joãozinho: Bom, a história acabou, podemos ir embora?

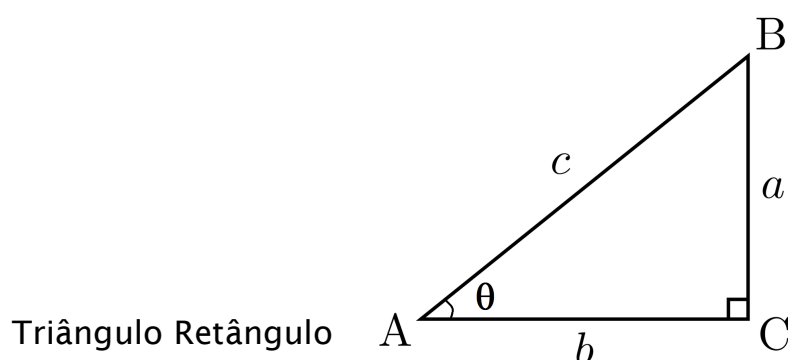
Professora: Quase lá Joãozinho. Pouco antes de Cabral os nomes já estavam estabelecidos. Mas lembre que tudo isso era considerado como preliminares para o estudo da astronomia. Aparecem então três matemáticos que tornaram a teoria muito parecida com a que estudamos hoje. São eles Reticus que viveu entre os anos 1514 e 1576 que estudou com Copérnico; Regiomontanus, que nasceu em 1436 e morreu em 1476 que realizou a maior obra, com o título Triângulos de Todos os Tipos, publicado em 1463; e finalmente Bartolomeo Petiscus que viveu entre os anos 1561 e 1613, que inventou o termo Trigonometria. A partir de então a trigonometria tornou-se uma disciplina independente da astronomia. E agora sim a nossa história acabou por hoje.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Revisar com seus alunos os conceitos básicos da trigonometria, com atenção especial às duas principais funções trigonométricas *seno* e *cosseno*, pois estas serão abordadas ao longo do áudio.

Dado o triângulo retângulo mostrado na figura 1, defini-se as funções trigonométricas fundamentais como sendo:



Senso

O seno do ângulo θ é a razão entre o cateto oposto a θ , lado a , e a hipotenusa do triângulo, lado c .

$$\text{seno}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

Cosseno

O cosseno do ângulo θ é a razão entre o cateto adjacente a θ , lado b , e a hipotenusa do triângulo, lado c .

$$\text{cos}(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

Tangente

A tangente do ângulo θ é a razão entre o cateto oposto a θ , lado a , e o cateto adjacente a θ , lado b . Ou ainda, a razão entre o seno e o cosseno do ângulo θ .

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{cos}(\theta)} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{b}$$

Ângulos Notáveis

A partir de deduções geométricas é possível calcular as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30° , 45° e 60° .

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

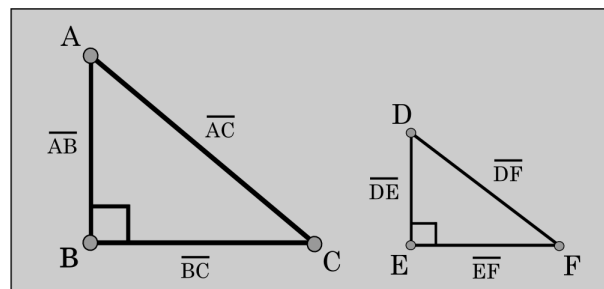
Depois da execução

Após a execução do áudio, sugere-se ao professor trabalhar com seus alunos uma situação de aplicação prática da trigonometria apresentado no programa. Por exemplo: O cálculo da altura de uma pirâmide com base nas sombras da pirâmide e de uma vara de referência.

Calculo da altura de uma pirâmide

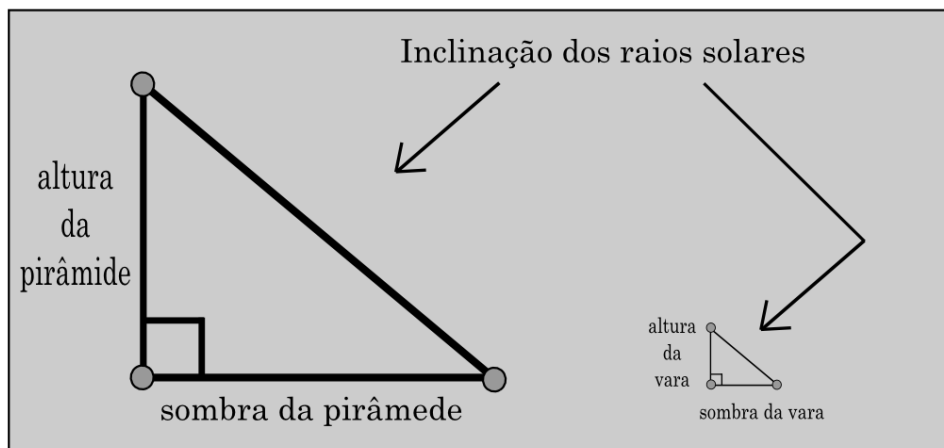
Das propriedades de semelhanças de triângulos temos que:

Dados 2 triângulos retângulos \overline{ABC} e \overline{DEF} , como mostrados na figura ao lado. Se os triângulos possuírem os ângulos internos iguais, temos as seguintes relações para os comprimentos dos lados dos dois triângulos:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

Utilizando essas relações para o cálculo da medida da altura da pirâmide, temos que:



Considerando a inclinação dos raios solares a mesma para a pirâmide e para a vara, o que define que os ângulos internos dos triângulos formados sejam iguais, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{\text{altura da pirâmide}}{\text{altura da vara}} = \frac{\text{sombra da pirâmide}}{\text{sombra da vara}}$$

Sendo a altura da vara, sombra da pirâmide e a sombra da vara alturas conhecidas, temos que:

$$\text{altura da pirâmide} = \frac{\text{sombra da pirâmide}}{\text{sombra da vara}} \times \text{altura da vara}$$

Sugestões de leitura

Eves, H., (2004). **Introdução à história da Matemática**. Editora da Unicamp, Campinas.

Ficha técnica

Autor *William Martins Vicente*

Revisão *Samuel Rocha de Oliveira*

Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*

Coordenação Geral *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas

Reitor *Fernando Ferreira Costa*

Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*

Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diretor *Caio José Colletti Negreiros*

Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*

