Matemática Multimídia

Guia do Professor

Áudio

Infinito 2

Série **Mátema**

Objetivos

1. Abordar a idéia de infinito ao longo da história da matemática;
2. Apresentar as considerações feitas pelos matemáticos Georg Cantor e Richard Dedekind sobre a idéia de infinito atual.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao áudio ao qual este guia se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Infinito 2

Série
Mátema

Conteúdos
História da matemática.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Abordar a idéia de infinito ao longo da história da matemática;
2. Apresentar as considerações feitas pelos matemáticos Georg Cantor e Richard Dedekind sobre a idéia de infinito atual.

Sinopse
Através da história *Dois amigos e o Infinito,* o programa nos apresenta como Georg Cantor e Richard Dedekind, revolucionaram a noção de infinito. O programa mostra como surgiu esse novo conceito de infinito, o infinito atual, que difere substancialmente da noção de infinito potencial lançada pelos gregos.

Material relacionado
Áudios: *Infinito 1;*
Experimentos: *?;*
Softwares: *?*

Introdução

Sobre a série

A série Mátema levanta aspectos históricos dos fundamentos da matemática. O contexto da ficção tem o objetivo de tornar o programa interessante para o ensino médio e para adolescentes, uma vez que faz uso do estereótipo do Joãozinho, da Sofia e da professora. Em geral, os assuntos são mais elaborados do que os que são vistos nos programas de ensino médio. No entanto, o programa traz ricas informações e tem o devido cuidado com as definições e conclusões matemáticas.

Sobre o programa

Aqui reproduzimos parte de uma versão do roteiro original do prof. Dicesar Fernandes que deu origem ao programa.

Primeira Parte:

Oi, gente, estamos novamente com vocês, com Joãozinho, aquele menino terrível, com Sofia, aquela aluna aplicada, e nossa gentil e simpática professora para contar mais uma das muitas histórias da matemática.

Hoje, vamos conversar sobre dois amigos, George Cantor e Richard Dedekind, que surpreenderam e revolucionaram a idéia de infinito. Sabemos que os gregos já se preocupavam com o infinito. É exemplar a famosa proposição de Euclides sobre os números primos: dada qualquer quantidade de números primos sempre existe mais um. Hoje diríamos que o conjunto dos números primos é infinito. Mas um infinito diferente daquele dos gregos. Essa nova forma levou dois mil anos para começar a ser pensada por Cantor e Dedekind. A nossa história de hoje se chama “Dois Amigos e O Infinito”.

Sofia: Professora, uma amiga da faculdade me disse que existem dois tipos de infinito. É verdade?

Joãozinho: Claro, os infinitamente inteligentes como eu e aquelas...

Professora: Joãozinho!!! Bem, é verdade sim, Sofia. Um tipo era o infinito conhecido pelos gregos da antiguidade, o outro infinito só veio a ser conhecido no século dezenove.

Sofia: Professora, a idéia que eu tenho do infinito é de tender para o infinito, mas a senhora disse que existe outra idéia.

Professora: Sofia, se juntarmos as mãos, colocamos em correspondência um a um os dedos de uma mão com os da outra. Esse simples ato de juntar as mãos é uma das idéias mais importantes da matemática: a correspondência um a um. Quando entro na sala de aula, não preciso contar quantos alunos faltaram, eu sei mesmo sem contar.

Joãozinho: Como é que você sabe professora? Você tem olhos atrás da cabeça?

Professora: Não, Joãozinho. Se todas as carteiras estiverem ocupadas, não faltou ninguém porque o número de carteiras é igual ao de alunos. Se faltou alguém vou perceber que existem carteiras vazias. Se todas as carteiras estiverem ocupadas e restarem alunos de pé concluo que faltam carteiras.

Joãozinho: E posso saber como você percebe isso, professora?

Professora: Sem contar, posso saber quantos elementos um conjunto tem em relação ao outro, colocando em correspondência um a um seus elementos. Essa capacidade deve ter sido adquirida pelo homem antes mesmo de aprender a contar.

Sofia: Verdade professora! Parece até inconsciente. Nunca tinha pensado nisso.

Professora: Parece, Sofia, mas Galileu pensou nisso, e foi o primeiro a fazer o seguinte raciocínio: um número é quadrado se for o produto de outro número por ele mesmo. 1, 4, 9, 16, todos são números quadrados. Parece claro que existem mais números naturais que números quadrados. No entanto, se eu associar cada número 'n' com o número 'n' ao quadrado, estarei estabelecendo uma correspondência um a um.

Sofia: Ummm, certo.

Professora: Portanto, sou obrigada a concluir que existem tantos números naturais quanto números quadrados! Mas o conjunto dos números quadrados é um subconjunto próprio do conjunto dos números naturais. Como conseqüência, vejo que as noções de maior do que ou igual não se aplicam nesses casos. Mas Galileu* parou seu raciocínio por aqui.

Professora: Ele não desenvolveu o assunto mais do que isso.

Sofia: E alguém continuou esse raciocínio, professora?

Professora: Sim. Um livro chamado Paradoxos do Infinito, escrito pelo matemático tcheco Bolzano e publicado em 1851, tratava desse e de outros problemas.

Joãozinho: Como os paradoxos do corredor e da tartaruga, professora?

Professora: Não, Joãozinho. Aqueles paradoxos tinham a ver com o infinito potencial. Agora estamos tratando do segundo tipo de infinito. O infinito atual.

Sofia: Gauss leu esse livro, professora?

Professora: Certamente não. Mas se tivesse lido creio que não iria gostar.

Sofia: Como que a senhora sabe? O livro é muito maluco?

Professora: Não. Ele escreveu uma carta em 1831 a um amigo de nome Schumacher reprovando o uso do infinito consumado.

"Eu devo protestar muito veementemente contra seu uso do infinito como alguma coisa consumada, pois isso nunca é permitido em matemática. O infinito não é senão um modo de falar, significando um limite que razões podem se aproximar tanto quanto desejamos, quando outros são permitidos crescerem indefinidamente". Essa foi a carta que Gauss escreveu a seu amigo Schumacher em 1831, reprovando o uso do infinito como algo consumado. O que vocês acham disso? Professor, discuta isso com seus alunos que voltamos em breve!

Segunda Parte:

Olá, estamos de volta. No bloco anterior, o Joãozinho, aquele menino terrível, a Sofia, aquela aluna aplicada e nossa gentil e simpática professora discutiam noções de infinito. Paramos na carta que Gauss escrevera para seu amigo Schumacher reprovando o uso do infinito como algo consumado. O que será que nossos personagens descobriram agora?

Sofia: Se eu entendi, professora, Gauss só aceitava o infinito potencial.

Professora: Isso, Sofia. Além disso, ele deixa claro que não podemos operar com o infinito como se fosse número. O intrigante é que Gauss, sendo matemático e astrônomo, tenha deixado passar a observação de Galileu de que existem tantos números quadrados quanto números naturais.

Joãozinho: Eu continuo aqui no meu canto, esperando que alguém conte essa história do infinito 2.

Professora: Tudo bem. A história continua quando o matemático George Cantor começou a refletir sobre o livro de Bolzano. Seguindo as idéias de Galileu, [Cantor] ficou surpreso quando verificou que existiam tantas frações quanto números naturais.

Sofia: Mas por que isso é surpreendente, professora?

Professora: Ora, porque entre um número e seu sucessor não existe outro número, mas entre duas frações existem infinitas frações.

Joãozinho: Como ele conseguiu saber disso?

Professora: Colocando em correspondência um a um os dois conjuntos. O entusiasmo de Cantor foi tanto que ele mandou um exemplar do livro de Bolzano ao seu amigo Richard Dedekind, junto com uma carta contando sua descoberta.

Joãozinho: E o que ele achou dessa história do infinito 2?

Professora: Ele gostou muito da idéia, Joãozinho. E ele também fez uma descoberta: existem tantos números naturais quanto soluções de equações algébricas com coeficientes inteiros. Sugeriu então uma definição. Dizer que um conjunto é infinito quando pudermos achar uma correspondência um a um do conjunto dado com um de seus subconjuntos próprios.

Sofia: Nossa, professora! E Cantor gostou da idéia?

Professora: Prontamente! Estava assim formada a idéia de infinito atual. Uma idéia que batia de frente com a opinião e a tradição reafirmada por Gauss.

Sofia: Professora! A senhora só falou de conjuntos infinitos que podem ser colocados em correspondência com os números naturais. Mas existem outros conjuntos infinitos, não é?

Professora: Sim. Foi uma nova surpresa para Cantor. Ele descobriu que um segmento de reta tem tantos pontos quanto uma reta toda! E também que os pontos de uma reta não podem ser colocados em correspondência um a um com os números naturais. Concluiu que o infinito dos números naturais era diferente do infinito dos números reais. Disse então que esses conjuntos tinham potências diferentes. A potência dos números naturais é menor do que a potência dos números reais.

Esta não é o fim de uma história, mas o começo de outra. Depois de ter sido ironizado e ridicularizado pelas suas ideias, que vão muito além daquilo que contamos aqui, veio o reconhecimento para Cantor. No Primeiro Congresso Internacional de Matemática, realizado em 1900, na cidade de Paris, o grande matemático David Hilbert levantou o problema de Cantor dentre outros 22** que em sua opinião norteariam a matemática no século 20: existe algum conjunto com potência maior do que a potência dos números naturais mas menor do que a potência dos números reais? Este e outros problemas instigantes levaram David Hilbert a concluir dizendo: jamais alguém nos acordará desse sonho maravilhoso que Cantor nos criou. Será?!

* Galileu Galilei seria o nome completo. Alguns preferem chamar de Galileu, outros de Galilei.

**A lista original dos Problemas de Hilbert continha 23 problemas matemáticos e não 26 conforme informa o áudio, (Eves, 2007).

Sugestões de atividades

Antes da execução

Sugere-se antes da execução do áudio que o professor reforce o conceito de infinito potencial apresentado e defendido pelos gregos e que foi tratado no primeiro áudio da serie, Infinito 1.

A concepção do infinito potencial é uma forma intuitiva de conceber o infinito, sendo por isso de melhor aceitação entre os matemáticos ao longo da história. Nesta concepção, definida pelos gregos, o infinito corresponde a algo que pode ser aumentado, continuado ou estendido, tanto quanto se queira. Como exemplo do infinito potencial podemos citar a sequência dos números positivos naturais: é sempre possível somar mais um, estendendo-a indefinidamente:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11, ...

Depois da execução

Sugere-se ao professor, após a execução do áudio, enfatizar alguns aspectos relevantes das diferenças entre os conceitos de infinito atual e o infinito potencial. Ressaltar as contribuições de Georg Cantor para a consolidação do conceito de infinito atual.

A tentativa de Galileu de emparelhar o conjunto dos números naturais positivos com o conjunto dos quadrados perfeitos de números naturais positivos foi uma das primeiras formas de aceitação do infinito atual.

$$\begin{array}{lcccccc} N \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \cdots & \Downarrow \\ N^2 \rightarrow & 1 & 4 & 9 & 16 & \cdots & n^2 \end{array}$$

Desta forma todo número natural positivo teria seu correspondente no conjunto do quadrados perfeitos e vice versa, ou seja, não sobraria elemento em nenhum dos dois conjuntos que não teria um correspondente único no outro conjunto. Caracterizando uma correspondência biunívoca. Isto faria com que os dois conjuntos tivessem o mesmo número de termos, apesar de que o conjunto N^2 fosse um sub-conjunto de N. Este procedimento levou Galileu a certos paradoxos que contrariava princípios matemáticos aceitos na época.

Somente quase três séculos mais tarde Cantor começou a usar o conceito de correspondência biunívoca para estender a noção de cardinalidade aos conjuntos infinitos. Se dois conjuntos podem ser colocados em correspondência biunívoca diz-se que eles têm a mesma cardinalidade.

Através da aceitação do infinito atual, Cantor conseguiu, entre outras coisas, mostrar que os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais têm a mesma cardinalidade e que o conjunto dos números irracionais tem cardinalidade maior do que dos conjuntos dos números naturais.

Uma das grandes revoluções no tratamento do conceito de infinito por Cantor foi tratar o infinito como um objeto acabado, passível de ser matematizado dentro de certos limites, como são os objetos finitos.

Sugestões de leitura

H. Eves (2007). **Introdução à história da matemática**. Editora Unicamp.

Sites recomendados:

Infinito, uma história a contar, (Pág. Visitada em 23/04/2011, 11:00h) http://www.ipv.pt/millenium/millenium34/16.pdf;
O infinito (Pág. Visitada em 02/05/2011, 13:30h) http://w3.math.uminho.pt/~jcosta/O%20Infinito.pdf;

Ficha técnica

Autor *William Martins Vicente*
Revisão *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenação Geral *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Caio José Colletti Negreiros*
Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*