Matemática Multimídia

Guia do Professor

Áudio

Infinito 1

Série **Mátema**

Objetivos

1. Introduzir o conceito de infinito;
2. Apresentar as considerações feitas pelos gregos sobre o conceito de infinito.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao áudio ao qual este guia se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Infinito 1

Série
Mátema

Conteúdos
História da matemática.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Introduzir os conceitos de infinito;
2. Apresentar as considerações feitas pelos gregos sobre o conceito de infinito.

Sinopse
A busca dos gregos pelo entendimento do infinito é apresentada durante o programa, em uma conversa entre a professora, Joãozinho e Sofia. Algumas das dificuldades que os gregos encontraram para questões envolvendo o infinito são abordadas. A professora exemplifica ainda conceitos tais como de infinito atual e infinito potencial. O rigor matemático com que deve ser tratado o infinito é também um dos temas da conversa.

Material relacionado
Áudios: *Outro áudios;*
Experimentos: *?;*
Softwares: *?*

Introdução

Sobre a série

A série Mátema levanta aspectos históricos dos fundamentos da matemática. O contexto da ficção tem o objetivo de tornar o programa interessante para o ensino médio e para adolescentes, uma vez que faz uso do estereótipo do Joãozinho, da Sofia e da professora. Em geral, os assuntos são mais elaborados do que os que são vistos nos programas de ensino médio. No entanto, o programa traz ricas informações e tem o devido cuidado com as definições e conclusões matemáticas.

Sobre o programa

Aqui reproduzimos parte de uma versão do roteiro original do prof. Dicesar Fernandes que deu origem ao programa.

Primeira Parte:

Oi, gente, estamos novamente com vocês, com Joãozinho, aquele menino terrível, com So□a, aquela aluna aplicada, e nossa gentil e simpática professora para contar mais uma das muitas histórias da matemática.

Hoje, vamos conversar sobre o infinito. Os gregos foram os primeiros a fazer considerações sobre o infinito. Essas considerações foram profundas e as idéias gregas perduram por mais de dois mil anos.

Sofia: Quem foi o primeiro grego a pensar no infinito?

Professora: Parece que foi Anaxágoras, um filósofo que viveu mais ou menos na época de Pitágoras. Anaxágoras dizia que não existe o infinitamente grande nem o infinitamente pequeno.

Sofia: Parece complicado pensar no infinito sem fantasiar. O universo infinito, o amor que deve ser infinito enquanto dure.

Professora: Você tem razão. O infinito tem sido usado na literatura, nas artes, e mesmo na matemática, de uma forma intuitiva, vaga. Tratar do infinito nos limites da matemática, mesmo de modo mais ou menos rigoroso, exige um certo cuidado.

Joãozinho: Aquelas histórias do corredor que não podia alcançar uma tartaruga, da flecha que não saía do lugar, não está relacionada com o infinito?

Professora: Sim, estão. Essas histórias foram inventadas por um grego chamado Zeno de Eléa. O objetivo de Zeno era chamar a atenção para o fato de que é sempre delicado tratar com infinito. Uma das histórias é a seguinte: um atleta tinha que correr um certo percurso. Mas para chegar à linha de chegada, ele tinha que percorrer metade da distância. Chegando à metade, tinha que percorrer mais a metade da metade que faltava.

Sofia: Mas assim ele não vai chegar nunca no final do percurso!

Professora: Sim Sofia! Matematicamente, trata-se de somar um meio, mais um quarto, mais um oitavo, e assim por diante. Se tivéssemos que somar dessa forma não terminaríamos nunca.

Joãozinho: E como se explica essa situação? Porque é claro que ele iria cruzar a linha de chegada!

Sofia: É um paradoxo!

Professora: Parece um paradoxo, mas talvez não seja. Aristóteles criticou esses supostos paradoxos, fazendo uma distinção entre o infinito atual ou consumado e o infinito potencial.

Sofia: Mas qual é a diferença entre esse dois tipos de infinito?

Professora: A idéia de infinito potencial é simples. Por exemplo, os números: é idéia básica da matemática que todo número tem um sucessor. Assim, não existe o maior número. Se existisse o maior número, ele teria um sucessor, que seria maior do que ele. Seria uma contradição. Conclui-se então que o conjunto dos números naturais é infinito, mas o infinito mesmo não entra no raciocínio.

Joãozinho: Entendi. Acho que os números pares e os números impares são infinitos neste sentido.

Professora: Exatamente. Um bom exemplo é a famosa proposição de Euclides sobre os números primos: dada qualquer quantidade de números primos sempre existe mais um.

Professora: Vejam que ele não usa a palavra infinito, como faríamos hoje dizendo que o conjunto dos números primos é infinito.

Sofia: Professora, mas essa distinção não resolve o problema do Aquiles. Resolve?

Professora: Não resolve. Porque os gregos não tinham na época o conceito de limite numérico. Por exemplo, seria difícil para eles imaginar porque as frações um meio, um terço, um quarto, um quinto, etc. que vão ficando cada vez menores, nunca chegam ao zero. Na realidade, os gregos só tinham o conceito de número natural. Sequer as frações faziam parte da matemática.

Segunda Parte:
Sofia: Ouvi falar que os gregos tinham horror do infinito.

Professora: Já ouvi falar também. Mas os gregos sabiam como manipular as coisas sem usar o infinito.

Sofia: Hmmmm

Professora: Por exemplo, uma proposição importante de Euclides diz o seguinte: dados dois segmentos arbitrários, um maior do que o outro, dividindo o maior pela metade, depois a metade pela metade, e continuando o processo chegaremos a um segmento que será menor do que o segmento menor dado. Observem que aqui não se trata de dividir o segmento maior infinitas vezes. Mas somente em número suficiente grande de vezes. Número para os gregos era somente número natural. O infinito não é um número, muito menos natural.

Joãozinho: Mas isso não é horror ao infinito.

Professora: Absolutamente, não. É rigor intelectual. O infinito não é um número. Então, não tem sentido considerar uma fração sobre o infinito e ainda dizer que vale zero. Isto levaria à contradições. Mas é um erro que muitos alunos, mesmo na universidade, cometem. Tenham isso sempre na cabeça: o infinito não é um número! Logo, vocês não podem calcular com o infinito como fazem com os números.

Sofia: Mas então, por que inventaram esse símbolo que parece um oito deitado?

Professora: Simplesmente para indicar que uma sequência de números cresce inde□nidamente. Ainda, para abreviar, dizemos que a sequência tende para o infinito. Assim a sequência dos números pares, dos números ímpares ou dos números naturais ao quadrado tende ao infinito. É muito prático escrever 'n' ao quadrado depois desenhar uma flechinha e o símbolo do infinito.

Joãozinho: Dona, se 'n' tende para o infinito, 'n' ao quadrado não deveria tender para um infinito maior, por exemplo, infinito ao quadrado.

Professora: Preste a atenção! Já expliquei que o infinito é apenas um símbolo, criado para abreviar o fato de que uma seqüência cresce indefinidamente. Além disso, como não tem sentido dividir por zero, também não tem sentido elevar o infinito ao quadrado. Não se calcula com o infinito como se fosse um número! Ponha isso na cabeça!

Sofia: Quem teve a idéia de representar o infinito como um oito deitado?

Professora: Foi o matemático inglês John Wallis, e usou o símbolo do infinito pela primeira vez em 1655. Na época, Newton tinha 24 anos. Mais tarde, Newton usou idéias de Wallis em seu livro Aritmética Universal.

Sofia: Mas os gregos eram espertos, não eram? Resolviam problemas cabeludos sem usar o infinito!

Professora: Pois é. Lendo Euclides e Arquimedes, podemos ver que eles sabiam como tratar com casos limites, onde estava implícito o infinito potencial. Vemos isso na retificação da circunferência feita por Euclides e no cálculo da área do círculo feito por Arquimedes. De maneira geral, os gregos preferiam evitar problemas que envolvessem o infinito. Mesmo assim, os gregos deixaram uma herança matemática in□nitamente grande.

Joãozinho: Mas como, a senhora não acabou de dizer que o infinito não existe?

Professora: Desculpem. Deveria ter sido mais atenciosa e ter dito que os gregos deixaram uma grande herança para a humanidade. A gente se distrai e acaba usando termos que não deveria ter usado. Mas isso é porque estamos numa aula de matemática. Temos que ser rígidos com os conceitos.

A idéia dos gregos de usar apenas o infinito potencial durou mais de dois mil anos. Mesmo Gauss, que tinha uma cabeça muito aberta, aceitava tão somente o infinito potencial. Em 1831, numa carta enviada a um amigo de nome Schumacher, reprovava o uso do infinito consumado, nos seguintes termos: Eu devo protestar muito veementemente contra seu uso do infinito como alguma coisa consumada, pois isso nunca é permitido em matemática. O infinito não é senão um modo de falar, significando um limite que razões podem se aproximar tanto quanto desejarmos, quando outros são permitidos crescerem indefinidamente. Essa era a opinião de Gauss. Para contrariar uma opinião de Gauss é preciso muita coragem. Mas um de seus alunos e um amigo tiveram essa coragem. Porém, essa já é uma outra história.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Como motivação para o áudio, o professor pode comentar sobre alguns dos vários paradoxos envolvendo o infinito que surgiram na Grécia e foram amplamente debatidos durante a idade média. Os paradoxos de Zenão de Eléia são exemplos clássicos. O paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, por exemplo. Aquiles dá uma vantagem para a Tartaruga, assim

Aquiles nunca pode alcançar a tartaruga; porque na altura em que atinge o ponto donde a tartaruga partiu, ela ter-se-á deslocado para outro ponto; na altura em que alcança esse segundo ponto, ela ter-se-á deslocado de novo; e assim sucessivamente, ad infinitum.

Depois da execução

Sugere-se ao professor, após a execução do áudio, discutir alguns conceitos como: a distinção entre o infinito atual e o infinito potencial, o rigor matemático com que deve ser tratado o infinito, o fato do infinito não ser um número.

O paradoxo de Aquiles e a Tartaruga pode ser resolvido se for tratado como uma soma de termos de uma progressão geométrica com infinitos termos. Se Aquiles for 10 vezes mais rápido que a Tartaruga, o momento que Aquiles começar a correr, a Tartaruga estará em uma posição P_o e quando Aquiles chegar a essa posição em um tempo t_0, a Tartaruga estará na posição P_1 e assim por diante. Podemos calcular o tempo de corrida de Aquiles da seguinte forma

$$T=t_0(1+1/10+1/10^2+ \ldots)$$

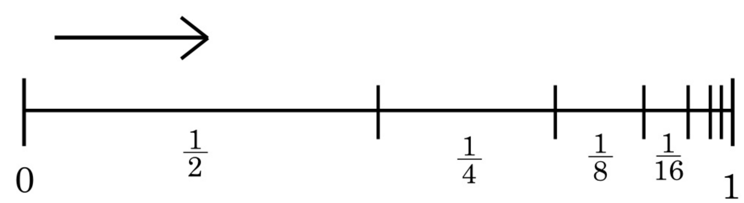
Onde o primeiro termo foi o tempo para alcançar a posição de vantagem dada à Tartaruga, o próximo termo será um décimo do tempo anterior, pois por hipótese, Aquiles é 10 vezes mais rápido do que a Tartaruga e assim por diante.

De fato, formalmente, há uma quantidade infinita de termos para Aquiles alcançar a Tartaruga e por isso os gregos antigos pensavam que era um paradoxo, mas essa soma total é finita. Basta perceber que é a soma de uma progressão geométrica de razão 1/10. Assim em $T=(1+1/9)\ t_0$ Aquiles alcança a Tartaruga.

Um exemplo envolvendo o caso do infinito atual é o paradoxo do vôo da Flecha, ou uma versão da corrida entre Aquiles e a Tartaruga:

O que se move deve sempre alcançar o ponto médio antes do ponto final.

Novamente, o paradoxo não existe pelo entendimento que a soma da progressão geométrica de razão 1/2 é finita, como ilustrado abaixo.



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{2^5}+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

Sugestões de leitura

H. Eves (2007). Introdução à história da matemática. Editora Unicamp.
Site recomendado: Infinito, uma história a contar,
http://www.ipv.pt/millenium/millenium34/16.pdf , (23/04/2011, 11:00h)

Ficha técnica

Autor *William Martins Vicente*
Revisão *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenação Geral *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Caio José Colletti Negreiros*
Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*