Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Surpresa para os calouros

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Usando a decomposição de um número em fatores primos, pode-se provar que um número inteiro é um quadrado perfeito, se e somente se tem um número impar de divisores;
2. Estudar o teorema Fundamental da Aritmética, ou da decomposição de um número inteiro em fatores primos;
3. Obter uma fórmula para a quantidade de divisores de um número natural.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Surpresa para os calouros.

Série
Matemática na Escola

Conteúdo
Números inteiros.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Usando a decomposição de um número em fatores primos, pode-se provar que um número inteiro é um quadrado perfeito, se e somente se tem um número impar de divisores;
2. Estudar o teorema Fundamental da Aritmética, ou da decomposição de um número inteiro em fatores primos;
3. Obter uma fórmula para a quantidade de divisores de um número natural.

Sinopse
Um jovem estudante, que é presidente do centro acadêmico, está preparando uma gincana para os calouros. Pede ajuda ao seu irmão que sugere prêmios aos calouros que resolverem o "problema dos armários". Acontece que o irmão do jovem desaparece e ele não sabe resolver o problema que propôs aos calouros. Fala com um amigo, que faz Matemática, para ajudá-lo. O amigo o ajuda a resolver o problema de uma maneira bem fácil.

Material relacionado
Experimentos: *Morto ou vivo*

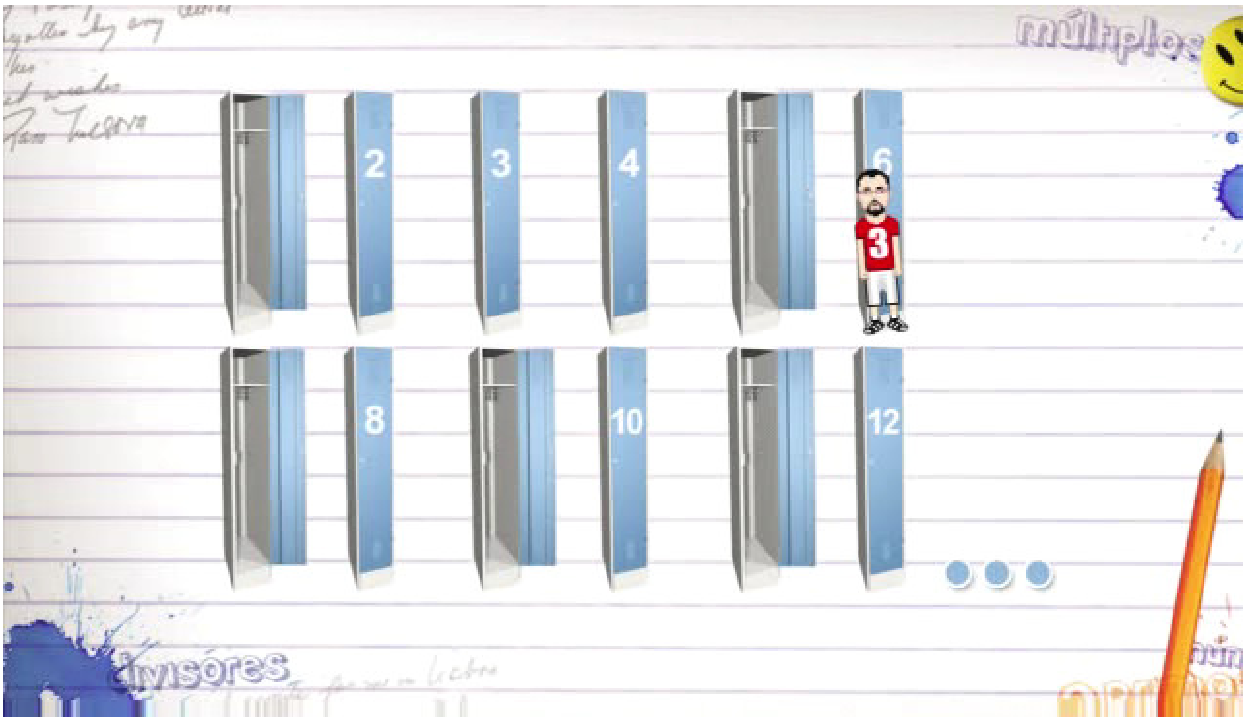
Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa se refere ao "problema dos armários", do excelente livro de 1945 *A Arte de Resolver Problemas*, de George Polya.



Para a solução deste problema devemos recordar os fatos:

- Um número natural diferente de 0 e de 1, é primo , se os únicos divisores dele são 1 e ele mesmo.

- Um número inteiro *p* é primo se $|p|$ é primo.

Os números primos são os "tijolos" no conjunto dos números inteiros, devido ao Teorema Fundamental da Aritmética (TFA):

"Todo número inteiro se fatora num produto de primos". De maneira mais rigorosa apresentamos o TFA abaixo.

TFA Seja $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ e $a \neq \pm 1$. Então existem números primos $p_1, p_2, \ldots, p_r \in \mathbb{Z}$ (r ≥ 1), todos maiores que 1, de maneira que: $a = p_1.p_2 \ldots p_r$ ou $a = -p_1.p_2 \ldots p_r$ conforme *a* > 0 ou *a* < 0. Ademais essa decomposição, a menos da ordem dos fatores, é única.

Na decomposição em fatores primos, é claro que nem sempre todos os fatores são diferentes entre si. A reunião de possíveis fatores iguais leva à expressão $a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \geq 1)$, para um número natural. Esta é a chamada decomposição canônica de $a \in \mathbb{N}$.

Dado um número $a \in \mathbb{N}$, *a* pode ser colocado na forma $a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \geq 1)$. Os divisores *b* de *a*, serão:

$$b = p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2} \ldots p_s^{\beta_s} (0 \leq \beta_i \leq \alpha_i ; i = 1,2,\ldots,s)$$

Como cada β_i pode assumir, independentemente, os $\alpha_i + 1$ valores 0, 1, 2, ..., α_i, temos então que o número de divisores de *a*, que denotamos por τ(a) é :

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_s + 1).$$

Exemplo, como $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$, então $\tau(630) = (1+1) \times (2+1) \times (1+1) \times (1+1) =$ **24 divisores.**

E os divisores são:

$2^0 x 3^0 x 5^o x 7^0 =$ **1**; $2^0 x 3^1 x 5^0 x\ 7^0 =$ **3**; $2^0 x 3^2 x 5^0 x 7^0 =$ **9**; $2^1 x 3^0 x 5^0 x 7^0 =$ **2**;
$2^1 x 3^1 x 5^0 x 7^0 =$ **6**; $2^1 x 3^2 x\ 5^0 x 7^0 =$ **18**; $2^1 x 3^1 x\ 5^0 x 7^1 =$ **42**; $2^1 x 3^0 x 5^1 x 7^0 =$ **10**;
$2^0 x 3^0 x 5^0 x 7^1 =$ **7**; $2^0 x 3^2 x 5^1 x 7^0 =$ **45**; $2^0\ 3^2\ 5^1\ 7^1 =$ **315**; $2^1\ 3^1\ 5^1\ 7^1 =$ **210**;
$2^0\ 3^0\ 5^1\ 7^0 =$ **5**; $2^1\ 3^0\ 5^0\ 7^1 =$ **14**; $2^0\ 3^1\ 5^1\ 7^0 =$ **15**; $2^0\ 3^1\ 5^0\ 7^1 =$ **21**;
$2^0\ 3^0\ 5^1\ 7^1 =$ **35**; $\mathbf{2^0}\ 3^2\ 5^0\ 7^2 =$ **63;** $2^1\ 3^1\ 5^1\ 7^0 =$ **30;** $2^1\ 3^2\ 5^1\ 7^0 =$ **90**;
$2^1\ 3^2\ 5^0\ 7^1 =$ **126**; $2^1\ 3^0\ 5^1\ 7^1 =$ **70**; $2^0\ 3^1\ 5^1\ 7^1 =$ **105**; $2^1\ 3^2\ 5^1\ 7^1 =$ **630.**

Problema dos armários

Em uma escola havia 1000 armários e 1000 alunos. Todo ano, no dia da visita à escola pelos ex-alunos, os alunos formavam uma fila em ordem alfabética e realizavam o seguinte ritual estranho:

O primeiro aluno abria todos os armários, o segundo fechava um sim e outro não, a partir do segundo. O terceiro mudava o estado dos armários, de 3 em 3, a partir do terceiro (abria os fechados e fechava os abertos). O quarto mudava o estado dos armários de 4 em 4, a partir do quarto, e assim por diante. Depois de todos os alunos passarem, quantos armários permaneciam abertos?

Depois de resolvido o problema, observe que para o armário ficar aberto ele deve ter um número ímpar de divisores; para cada divisor ele muda de estado. Como ele começa aberto, ele vai precisar de um número ímpar de divisores para ficar aberto (ex: 1ºdivisor ABRE; 2ºdivisor FECHA; 3ºdivisor ABRE). Este números são os quadrados perfeitos entre 1 e 1000. Como existem 31 deles entre 1 e 1000 a resposta é 31. No video o amigo explica o fato de um número perfeito ter um número impar de divisores com exemplos, mas a demonstração está abaixo.

Erro no vídeo – esqueceram do 4 e do 9
Ao contabilizar os divisores de 36, o estudante esqueceu de colocar o 4 e o 9 na lista. Assim o correto é

Divisores de 36 = 1, 2, 3, **4**, 6, **9**, 12, 18 e 36.

9 divisores => aberto

Sugestões de atividades

Depois da execução

Professor, peça aos alunos que façam as demonstrações dos seguintes resultados:

1) Prove que a soma de dois números naturais pares é par.

2) Prove que a soma de dois números naturais impares é par.

3) Prove que o produto de dois números naturais pares é par.

4) Prove que o produto de dois números naturais impares é impar.

5) Tome um número finito de naturais. Se um deles for par o produto deles é par.

6) Considere c um produto finito de naturais. Prove que, se c for impar, então todos os fatores são impares.

7) Prove que se n é um quadrado perfeito, ou seja $n = b^2$, para algum b em $\mathbf{N}$, então n tem um número ímpar de divisores.

8) Reciprocamente, prove que se um número natural tem um número ímpar de divisores, então ele é um quadrado perfeito.

Algumas demonstrações

1) Se a é par, $a = 2n$, para algum n natural e se b é par, $b = 2m$, para algum m natural, então $a + b = 2(n+m)$. Como $n+m$ é natural, $a + b$ é par.

7) Use o teorema fundamental da aritmética, a sua unicidade e o exercicio 4 acima para concluir que $\tau(n)$ é impar.

8) Use a unicidade novamente do teorema fundamental da aritmética e o exercicio 6, para construir o número b tal que $n = b^2$.

Sugestões de leitura

1. H.H.Domingues, Fundamentos de ARITMETICA- Atual Editora , 1991.

2. J.C.V.Sampaio, P.A.S.Caetano- Introdução à Teoria dos Números - um curso breve- EdUFSCar- São Carlos 2008.

Ficha técnica

Autor *Otilia Terezinha W. Paques*
Revisor *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*