Matemática Multimídia

Geometria e medidas

Guia do Professor

Vídeo

Sinfonia de Poliedros

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Introduzir a idéia matemática de simetria;
2. Apresentar os poliedros, ou sólidos, de Platão;
3. Verificar a validade da característica de Euler para estes objetos geométricos.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Sinfonia de Poliedros

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Geometria de sólidos regulares e irregulares, filosofia natural.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Introduzir a idéia matemática de simetria;
2. Apresentar os poliedros, ou sólidos, de Platão;
3. Verificar a validade da característica de Euler para estes objetos geométricos.

Sinopse
Um diretor de teatro, curioso da cultura grega, decide montar uma peça baseada no diálogo Timeu, de Platão. Para tanto, conta com a ajuda de dois amigos, um marceneiro e outro compositor que, ao trabalharem juntos na peça, acabam fascinados pelos sólidos de Platão.

Material relacionado
Áudios: *O que é poliedro?;*
Experimentos: *Cortar cubos;*
Softwares: *Sólidos de revolução;*
Vídeos: *Luthier de proporções.*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Este programa discorre sobre a geometria de alguns sólidos, em particular, daquela dos sólidos de Platão. Na ficção, um diretor de teatro resolve dirigir uma peça baseada no diálogo Timeu, de Platão. Durante sua produção, conta com a ajuda de um compositor e de um curioso marceneiro, com o qual trava um diálogo bastante rico acerca dos sólidos de Platão e de suas relações geométricas.

Os sólidos de Platão, tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro, são conhecidos desde a Antigüidade, tendo sido estudados extensivamente pelos gregos. Eles são chamados sólidos de Platão em homenagem ao famoso filósofo que tentou explicar a natureza de todas as coisas a partir deles. Estes sólidos, também conhecidos como poliedros, são objetos geométricos de faces planas e arestas retas, que podem ser convenientemente vistos como a região do espaço limitada pela intersecção de um número finito de semi-espaços.

O que faz destas formas objetos tão interessantes é a beleza intrínseca à simetria de cada um deles. Simetria é algo que se manifesta com freqüência na natureza e, por esta razão, tem influenciado o homem desde suas origens, especialmente em seu desenvolvimento intelectual, artístico e religioso. Em nosso dia-a-dia associamos os conceitos de regularidade, harmonia, proporção e equilíbrio à idéia de simetria. Matematicamente, entretanto, simetria tem uma definição muito mais precisa, a saber: ela é uma bijeção $f: A \to A$ que não altera a posição relativa de quaisquer dois pontos de seu domínio, ou seja, se x e y são pontos arbitrários de A que distam $d(x,y)$ um do outro, então, a distância entre as imagens destes pontos por f, $d(f(x),f(y))$, continua sendo $d(x,y)$, isto é,

$$d(x,y) = d(f(x),f(y)).$$

Leonardo da Vinci, que além de grande pintor foi também um excelente matemático, demonstrou que os polígonos regulares são as únicas formas do plano que apresentam uma quantidade finita de simetrias. Observando que polígonos regulares são figuras convexas, no sentido de que toda reta ligando quaisquer dois de seus pontos está completamente contida na região delimitada por suas arestas, e regulares, isto é, toda simetria do polígono transforma vértices e arestas deste em elementos de mesma espécie, então pode-se afirmar algo semelhante para objetos no espaço:

Teorema: Os sólidos platônicos são os únicos poliedros regulares e convexos do espaço.

Figura 1. Os poliedros platônicos.

Estas duas últimas constatações são resultados de classificação de objetos em matemática, algo bastante interessante de se fazer enquanto tenta-se elucidar completamente uma questão.

Professor, atente seus alunos ao fato de que os poliedros de Platão são também convexos e não somente objetos regulares como se afirma no vídeo.

Os poliedros platônicos estão curiosamente relacionados, pois podemos obter o cubo a partir do octaedro e vice-versa, ou ainda, o icosaedro a partir do dodecaedro e vice-versa, simplesmente ligando por segmentos de retas os centros de cada uma das faces destes sólidos aos centros das faces adjacentes. Diz-se, por isso, que tais pares de objetos são duais entre si. Observe que o tetraedro é auto-dual, já que o dual de um tetraedro é outro tetraedro.

Além da dualidade, existe ainda outra relação interessante entre estes sólidos, conhecida como característica de Euler para os poliedros de Platão. Esta é simplesmente uma identidade matemática que expressa que o resultado da subtração do número de arestas do total de vértices mais faces é sempre dois, ou seja,

$$\text{número de vértices} - \text{números de arestas} + \text{número de faces} = 2.$$

Sugestões de atividades

Antes da execução

Professor, antes de exibir este vídeo aos seus alunos, converse informalmente com eles sobre os tópicos aqui apresentados. Para que seus alunos não se sintam entediados, faça-o brevemente, sempre procurando despertar a curiosidade matemática em cada um deles. Ela é imprescindível para o bom aproveitamento deste material. Uma boa maneira de se fazer isso é questionando-os a respeito do que eles entendem por simetria, pedindo por alguns exemplos.

Durante a execução

Professor, logo após a apresentação dos sólidos de Platão, interrompa a exibição do vídeo, se julgar apropriado, e desenhe um cubo de grandes proporções em sua lousa. Identifique, daí, os centros das faces deste e peça a um aluno ir a lousa para ligar estes centros por segmentos de reta. Ao final, indague-o acerca do objeto assim obtido. Questione seus alunos, então, sobre o que aconteceria caso este procedimento fosse repetido com os outros poliedros. Chame a atenção deles para a existência de uma função injetora que associa as faces de um aos vértices do outro, de tal modo que faces que compartilham uma mesma aresta são levadas a vértices ligados por uma mesma aresta.

Depois da execução

Professor, encerrada a exibição, procure esclarecer todas as possíveis dúvidas de seus alunos, aproveitando-se, também, para indagá-los a respeito do vídeo: se gostaram dele ou não, o que acharam de seus personagens, se alguém ali se identifica com um deles, etc. Não deixe de fazê-lo, visto que esta é uma prática bastante benéfica à formação de seus alunos, na medida em que permite-se a eles liberdade de expressão e interação. Assim feito, restrinja seu interesse às simetrias dos poliedros denominadas de movimentos rígidos, isto é, àquelas simetrias que podem ser concretamente realizadas dentro do próprio espaço, ou seja, às suas rotações. Esta restrição é necessária aqui, pois não é recomendado neste momento que você, professor, trabalhe com seus alunos outro tipo de simetria dos sólidos platônicos, as reflexões.

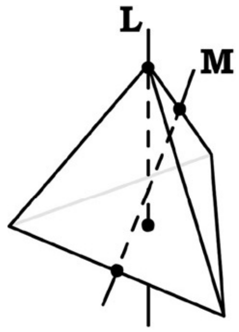

Figura 2. Alguns eixos de simetria para o tetraedro.

Considere, então, contar junto com seus alunos todos os movimentos rígidos do tetraedro de Platão. O objetivo aqui é fazer com que seus alunos entendam concretamente o que é simetria do ponto de vista matemático e percebam que, na matemática, muitas vezes usa-se a linguagem de funções para descrever objetos ou estruturas, assim como já fizemos para definir dualidade de poliedros.

Proposição: São doze os movimentos rígidos de um tetraedro convexo e regular.

Demonstração: Argumente que os eixos de rotação de um tetraedro passam por um de seus vértices ou pelos pontos médios de duas arestas. Dada a simplicidade deste poliedro, é fácil ver que existem três e quatro eixos de cada tipo. De acordo com a figura anterior, há apenas um movimento possível para eixos do tipo M, que é uma rotação de 180º, enquanto eixos do tipo L admitem rotações de 120º e 240º. Considerando-se, então, uma rotação de 360º ao redor de qualquer um destes eixos, acabamos por identificar um total de 12 rotações distintas, que afirmamos ser todos os movimentos rígidos do tetraedro. De fato, para ver que não existem outros movimentos rígidos, observe que um tetraedro pode ser colocado em uma caixa com cada uma de suas quatro faces paralelas à base desta e, nesta configuração, pode-se rotacioná-lo exatamente três vezes de modo a sempre ter uma aresta da base do tetraedro paralela a uma aresta da base da caixa.

Professor, para encerrar o assunto, desafie seus alunos a identificarem todos os movimentos rígidos de um octaedro ou icosaedro. Para tanto, peça primeiramente a eles que escolham um destes sólidos e os construam com papel e fita adesiva, usando os modelos do fim deste guia, que devem, preferencialmente, ser fotocopiados em papel sulfite ou cartolina colorida. Após montados, alerte-os de que esta tarefa pode ser simplificada contando-se os movimentos rígidos de um cubo ou dodecaedro, já que cubo-octaedro e dodecaedro-icosaedro são sólidos duais. Peça aos seus alunos, então, que montem o respectivo sólido dual ao poliedro previamente escolhido e deixe-os pensar livremente, possivelmente permitindo que levem a tarefa para casa. Caso considere pertinente, repita em uma próxima aula os argumentos da proposição anterior para estes dois casos, orientando-se pela figura abaixo.

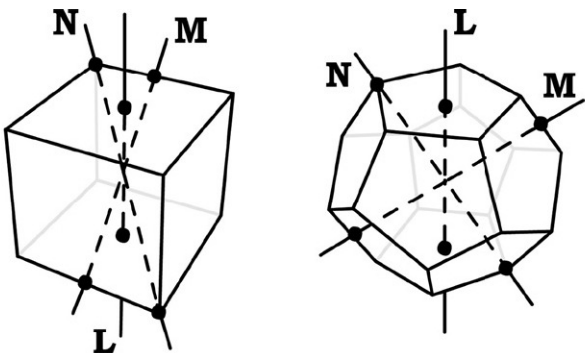

Figura 3. Alguns eixos de simetria para o cubo e dodecaedro.

Para o cubo, os eixos do tipo L admitem rotações de 90º, 180º e 270º, enquanto os eixos do tipo M, uma única rotação de 90º e os eixos do tipo N, rotações de 120º e 240º. Não se esqueça da rotação de 360º. Ao todo são 24 movimentos rígidos.

Por sua vez, os eixos do tipo L do dodecaedro admitem rotações de 72º, 144º, 216º e 288º, enquanto os eixos do tipo M, uma única rotação de 90º e os eixos do tipo N, rotações de 120º e 240º. Aqui também não se esqueça da rotação de 360º. Ao todo são 60 movimentos rígidos.

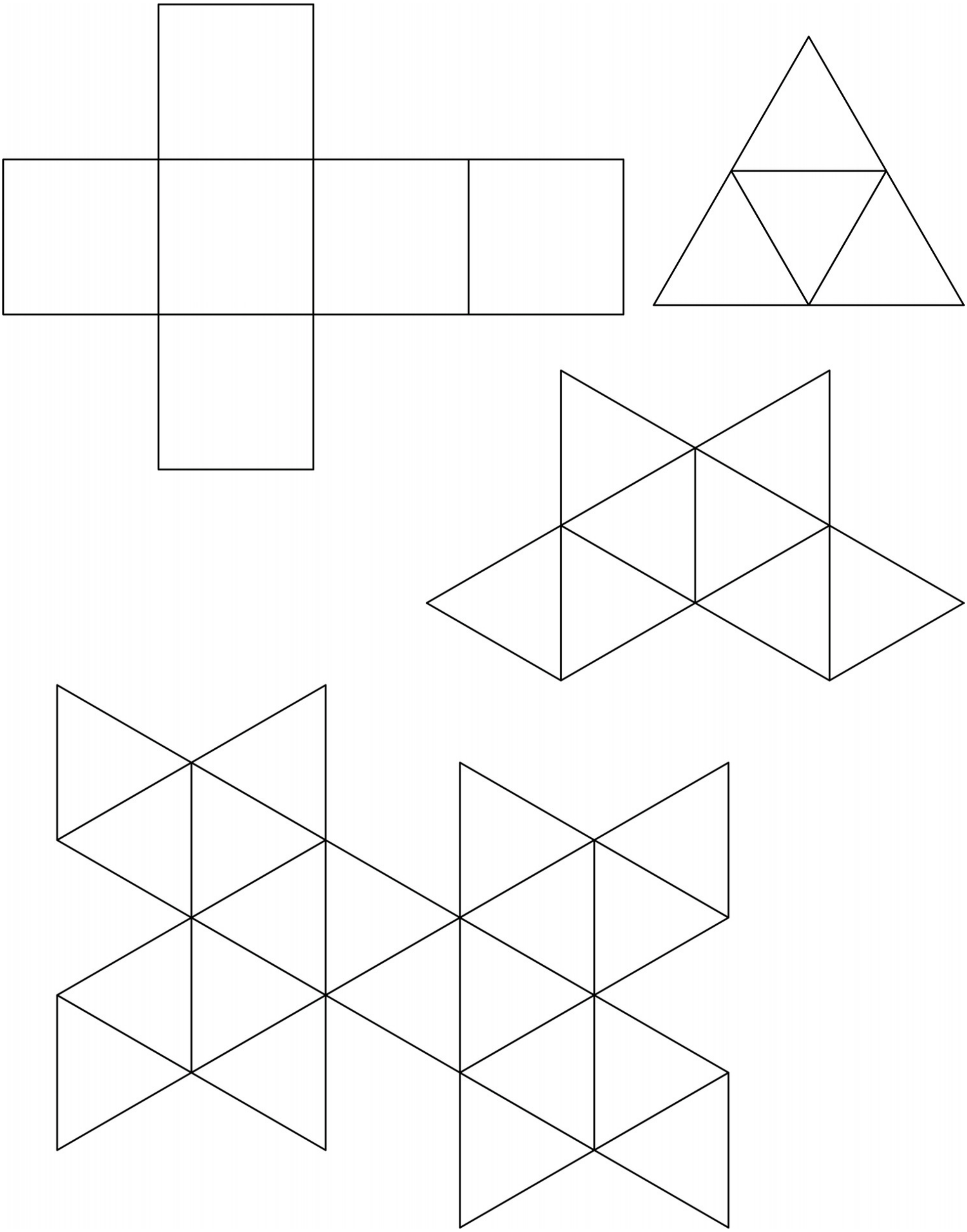

Figura 4. Modelos planificados de tetraedro, cubo, octaedro e icosaedro para construção.

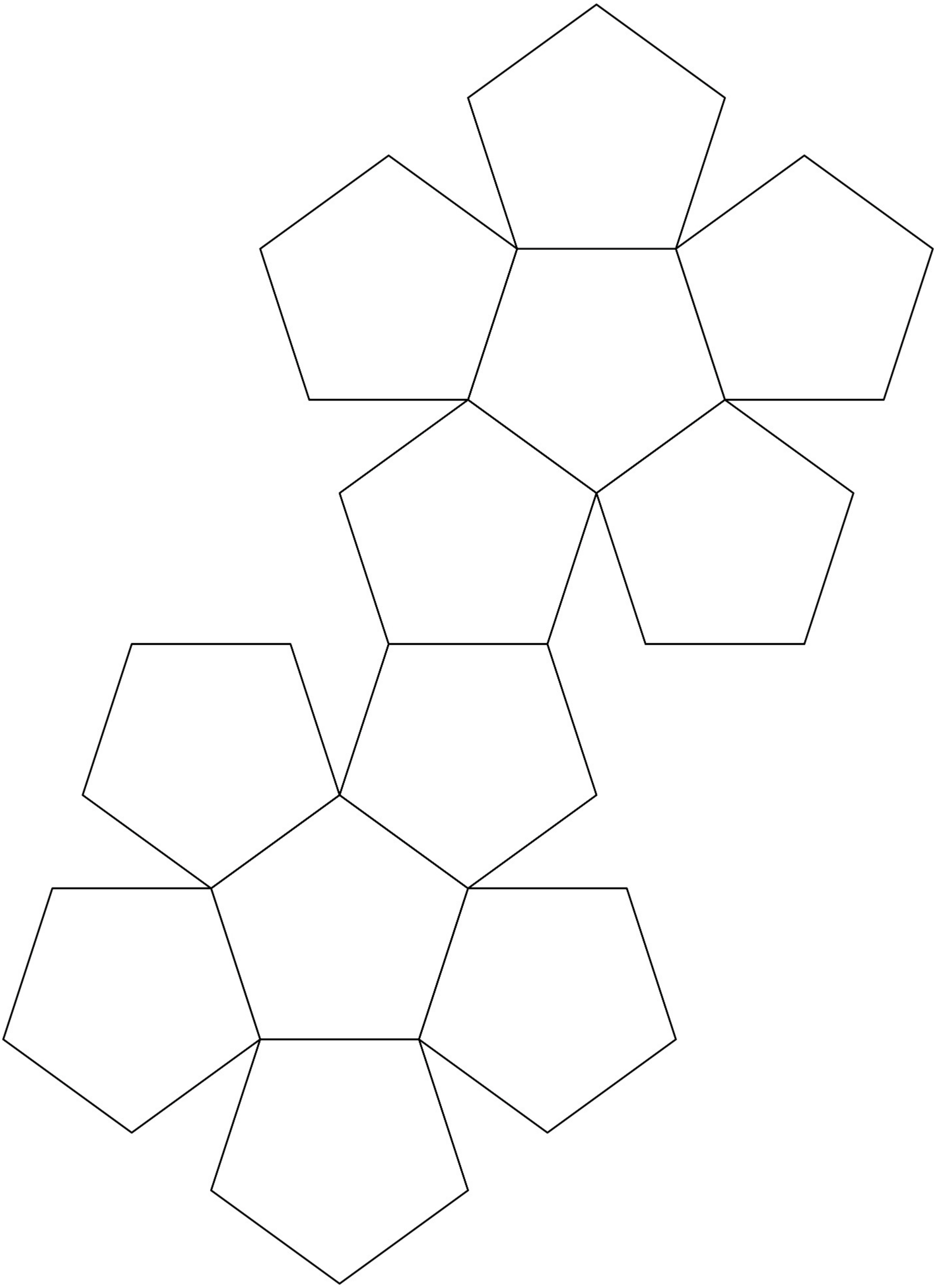

Figura 5. Modelo planificado de dodecaedro para construção.

Sugestões de leitura

H. Eves (2004). Introdução à História da Matemática. Editora Unicamp.
Euclides e Thomas L. Heath (1956). Os Treze Livros dos Elementos de Euclides, Volume X – XIII. Editora Dover.
O. Dolce e José N. Pompeo (2005). Geometria Espacial: Posição e Métrica. Atual Editora.

Ficha técnica

Autor *Douglas Mendes*
Revisor *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*