Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Roda do Sonho

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar o problema do cálculo da área de um círculo e conexões com outros resultados de geometria plana;
2. Apresentar e motivar a busca por aspectos históricos, em particular deduções da geometria grega e trabalhos de Arquimedes, que foram fundamentais no desenvolvimento da matemática.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Roda do Sonho

Série

Matemática na Escola

Conteúdos

Área de um círculo, relação com outras figuras geométricas e aspectos históricos.

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivos

1. Apresentar a dedução da área de um círculo a partir do resultado de Arquimedes (equivalência com a área de um triângulo) e da relação entre áreas de figuras semelhantes;
2. Motivar para a busca de aspectos históricos que foram fundamentais no desenvolvimento da matemática até a forma como é conhecida hoje.

Sinopse

O programa faz uso dos personagens Pablo e Arquimedes para abordar inicialmente o resultado de Arquimedes de que a área de um círculo é equivalente à área de um triângulo retângulo que tem por base o perímetro deste círculo e por altura seu raio. No final também é comentado, que usando o fato de que todos os círculos são semelhantes é possível calcular a área de um círculo apenas conhecendo seu raio.

Material relacionado

Áudios: *Tamanho da mesa, inveja de saturno;*
Vídeos: *A lenda de Dido*; *Um certo fator de escala*.

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser desenvolvido em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

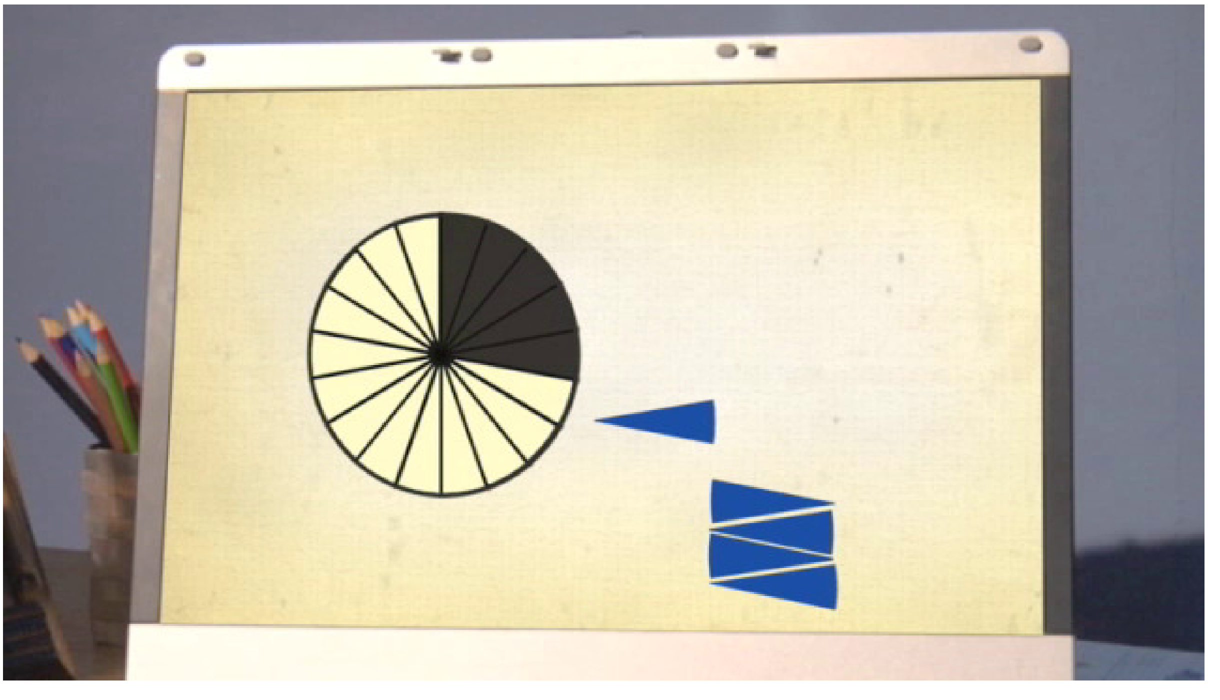
Sobre o programa

O programa faz uso dos personagens Pablo e Arquimedes para abordar o problema do cálculo da área do círculo. Apresenta o resultado de Arquimedes de que a área de um círculo é equivalente à área de um triângulo retângulo que tem por base o perímetro deste círculo e por altura seu raio. No final também é comentado, usando o fato de que todos os círculos são semelhantes e assumindo que o número que expressa a divisão entre o comprimento e o diâmetro de qualquer círculo é π, que é possível calcular a área de um círculo apenas conhecendo seu raio. Esta é uma forma de justificar a expressão que os alunos utilizam para o cálculo da área de um círculo.

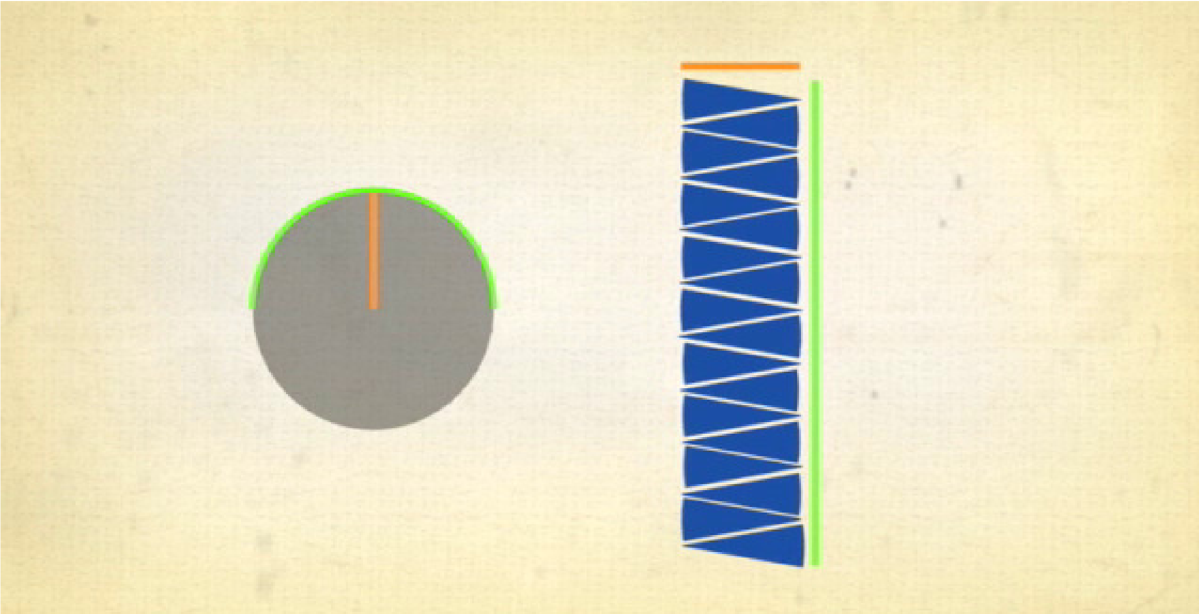
Pablo é um artista plástico e se interessa por ciências exatas. Suas obras são baseadas em motivos geométricos e circulares. Por isso, deseja entender a construção destas figuras.

O personagem Arquimedes aparece em um sonho de Pablo e se apresenta citando alguns de seus feitos e problemas de geômetras de sua época. Um dos problemas citados por ele é o de relacionar áreas de regiões planas com a área de outras figuras.

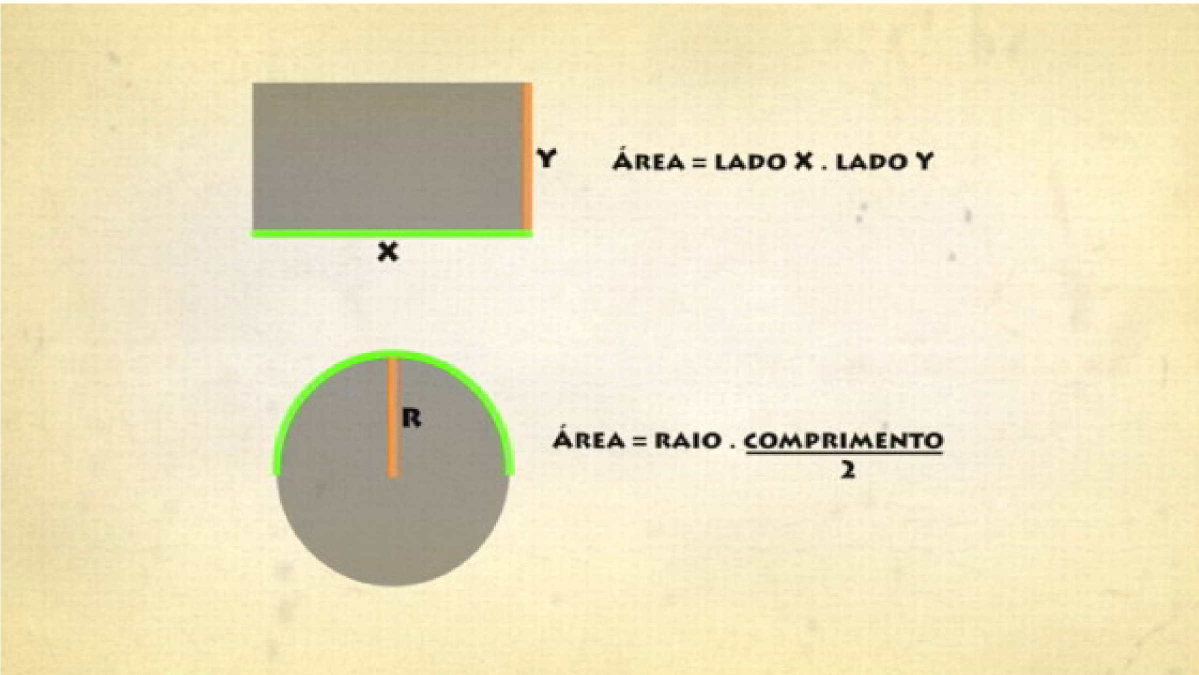
Para entender mais sobre áreas de círculos, Pablo divide um círculo em setores congruentes e rearranja estes setores em uma disposição com a forma aproximada de um retângulo.



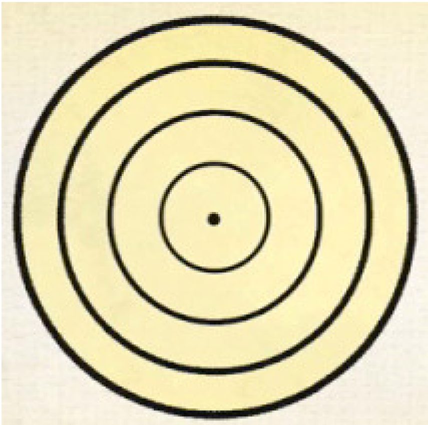
Ele percebe que, se considerar subdivisões do círculo com um número cada vez maior de setores, a nova disposição destes setores se aproxima cada vez mais de um retângulo cujo comprimento é igual ao semiperímetro do círculo e cuja altura é igual ao raio do círculo.

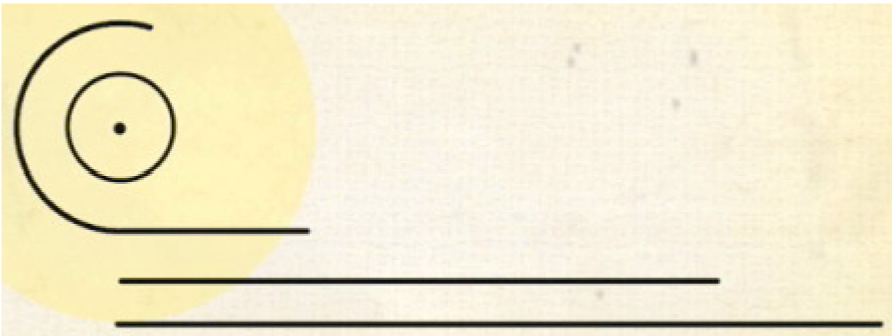


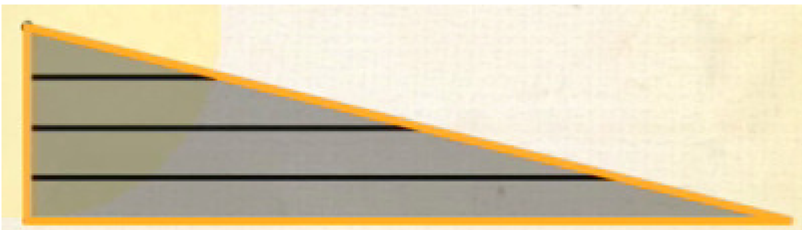
Desta forma, experimentalmente, ele percebe que a área do círculo é igual ao produto do semiperímetro do círculo pelo seu raio.

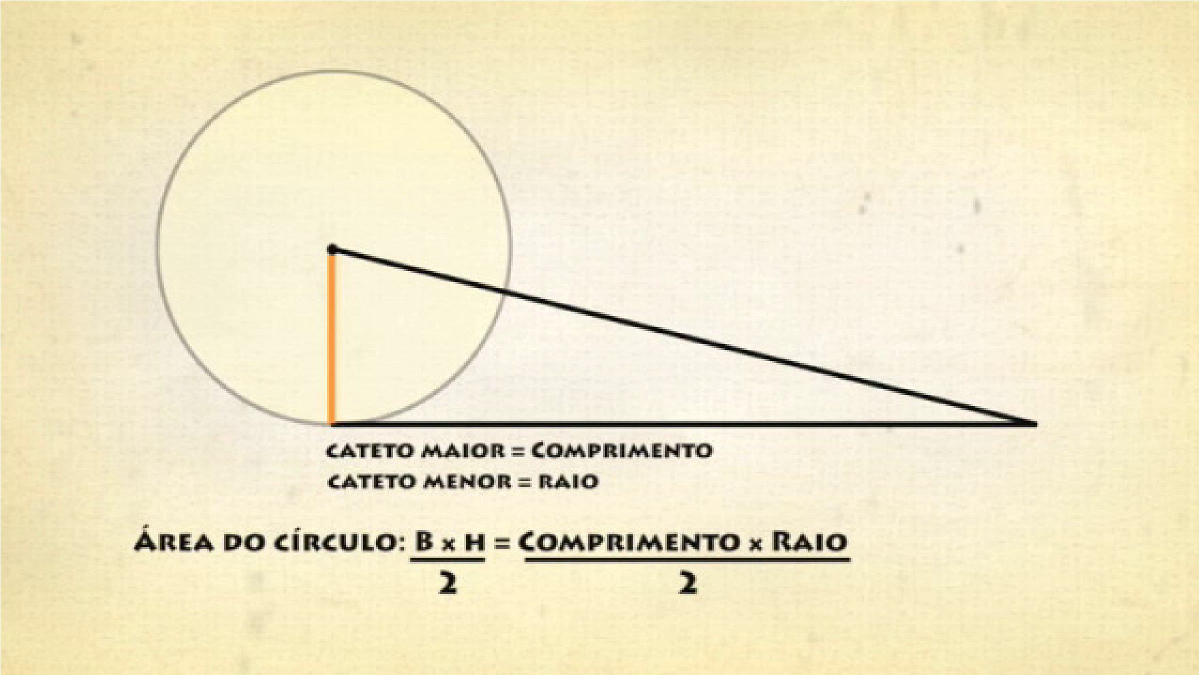


O programa mostra mais uma forma de visualmente constatar a expressão para a área do círculo, apresentando este como uma reunião de circunferências concêntricas sendo que a maior tem raio igual ao raio do círculo. Cada uma destas circunferências é desenrolada em segmentos de reta que preenchem um triângulo retângulo que tem um dos catetos de medida igual ao perímetro do círculo e o outro cateto de medida igual ao raio do círculo. Isto sugere que o círculo tem a mesma área deste triângulo, como demonstrou Arquimedes. Na seção *A demonstração do resultado de Arquimedes,* a seguir, a prova desta equivalência de áreas é apresentada seguindo os passos da prova de Arquimedes.

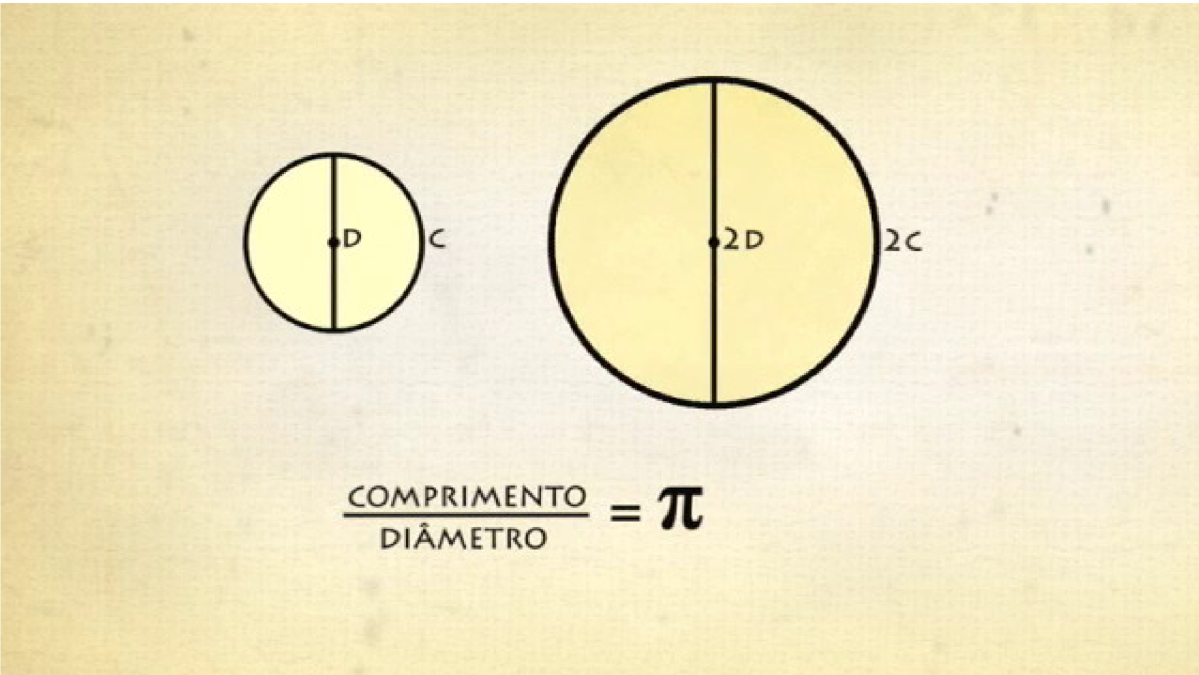


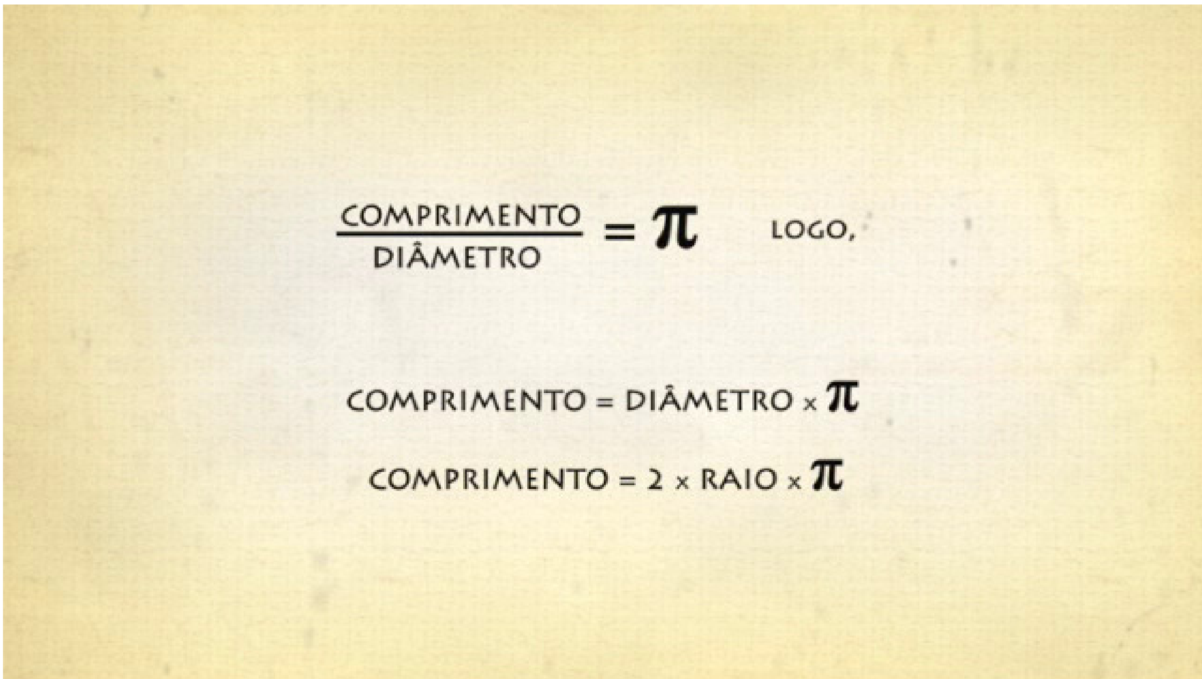






No programa é citado o resultado já conhecido pelos geômetras da Antiguidade de que o quociente do perímetro pelo diâmetro do círculo é constante para todos os círculos. Isto pode ser visto notando que todos os círculos são semelhantes e, assim, suas medidas correspondentes são proporcionais. Por meio de medidas experimentais, mostravam que esta constante era um pouco maior do que 3.





Arquimedes

Arquimedes (c. 282-212 a.C.) é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Suas abordagens no cálculo de áreas e volumes foram retomadas 1600 anos depois na Europa no período do Renascimento e são consideradas precursoras do advento do Cálculo Diferencial e Integral que por sua vez constitui-se numa base para muito do que se faz em matemática e ciência nos dias atuais.

Seus trabalhos são realmente notáveis e observamos que ele deixou registrado em sua obra "O Método", que tem uma história muito interessante, um método de descoberta de alguns dos resultados a que chegou (o qual era diferente da forma de provar então aceita pelos gregos).

Esta obra é endereçada a Erastóstenes (c. 276 –196 a. C.), ele também um grande matemático (foi quem estimou pela primeira vez a medida da circunferência da Terra) e diretor da biblioteca de Alexandria.

Os trechos abaixo de "O Método" dizem um pouco sobre o gênio de Arquimedes:

Acreditei ser oportuno confiar-te por escrito ... as características de um *método segundo o qual será possível abordar a investigação de certas questões matemáticas através da mecânica. Algo que além disto estou convencido que não é menos útil que a demonstração dos teoremas.*

.....

que pode representar uma contribuição não pouco proveitosa à investigação matemática, pois suponho que alguns de meus contemporâneos ou sucessores chegarão a encontrar pelo método exposto resultados que não me tenham ocorrido.

Além do resultado comentado no vídeo, Arquimedes também demonstrou, por exemplo, expressões para o volume e área da superfície de uma esfera.

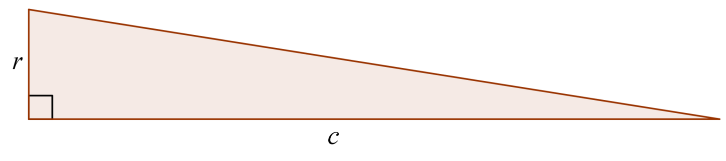
A demonstração do resultado de Arquimedes

Proposição: A área de qualquer círculo é equivalente à área de um triangulo que tem por base o perímetro do círculo e por altura seu raio.

O esquema de demonstração abaixo segue os passos da prova feita por Arquimedes [Baron]. Esta utiliza o que foi chamado depois de "método da exaustão".

Notamos que, como os gregos não tinham a noção formal de limite, era necessário no processo de aproximação demonstrar por duplo absurdo, isto é se uma quantidade não pode ser menor que e nem maior que outra, ela tem que ser igual a esta outra.

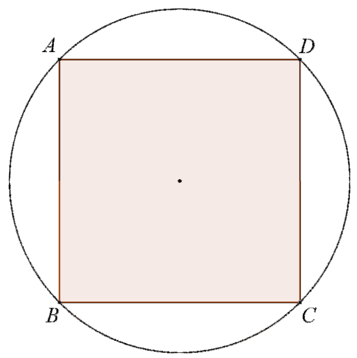
(I) Consideremos um círculo de área igual a A_c e K a área do triângulo retângulo que tem por base o perímetro c do círculo e por altura o seu raio r, A_c-K. Queremos provar que A_c=K.



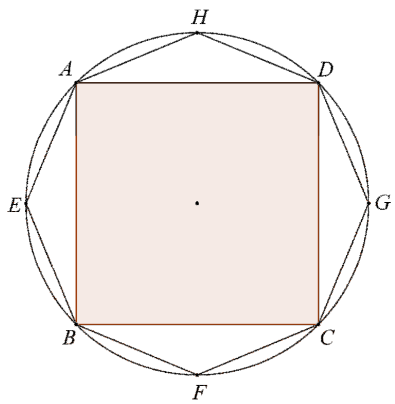
Para os números A_c e K, temos as possibilidades: A_c=K ou A_c>K ou A_c<K. Vamos verificar que não podem ocorrer as possibilidades A_c>K e A_c<K. Assim, concluiremos que A_c=K.

(II) *Primeiro vamos supor que a área do círculo seja maior do que a área do triângulo retângulo, ou seja, A_c>K.*

Seja o quadrado ABCD como na figura.

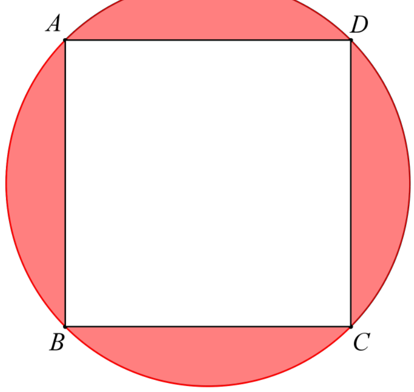


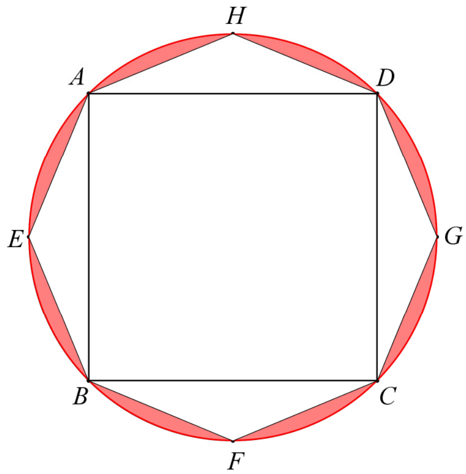
Dividindo ao meio os arcos AB, BC, CD, DA, obtemos o octógono AEBFCGDH e os arcos AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA.

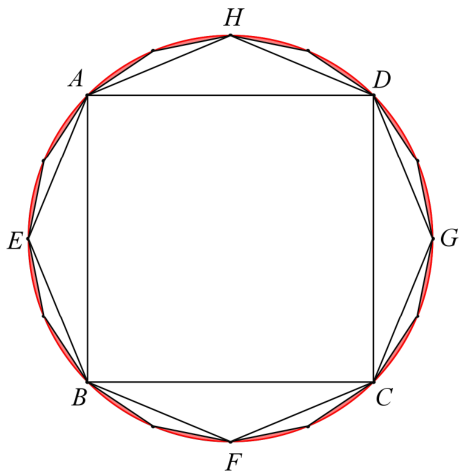


Se necessário, repetimos o processo até que a soma das áreas das regiões em vermelho nas figuras abaixo seja menor do que a área do círculo A_c menos a área K do triângulo, ou seja, menor que o número A_c-K **(**)**[1].

(**)[1] ver observação no final desta demonstração.



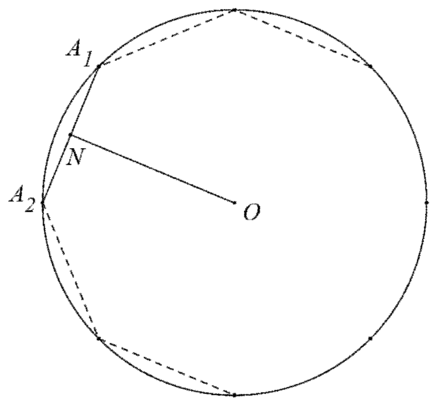




Quando isto acontecer, seja P_n a área do polígono correspondente e S a soma destas áreas, isto é, $S = A_C - P_n$. Então temos $S < A_C - K$. Assim, $A_C - P_n < A_C - K$. Portanto, a área do polígono é maior do que K, ou seja,

$$P_n > K. \qquad (1)$$

Seja A_1A_2 qualquer lado deste polígono e ON a perpendicular baixada sobre A_1A_2 do centro O. Então ON é menor do que o raio do círculo.



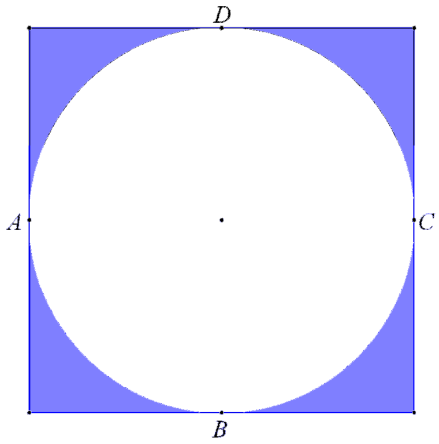
Portanto, ON é menor do que o cateto do triângulo retângulo de medida igual ao raio r do círculo. Também o perímetro p do polígono é menor do que a circunferência c do círculo, ou seja, menor do que o outro cateto de medida c do triângulo retângulo. Assim, a área do polígono é menor do que a área do triângulo retângulo de área K, pois a área P_n do polígono que é igual a (1/2).ON.p é menor do que (1/2).r.c=K. Portanto,

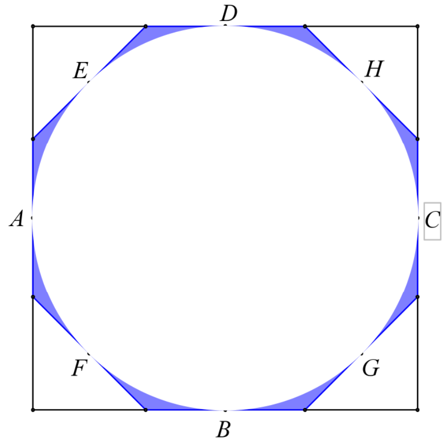
$$P_n<K. \qquad (2)$$

Assim, por (1) e (2), temos uma contradição, o que implica que a área do círculo A_C não pode ser maior do que K, como supusemos inicialmente.

(III) *A seguir, vamos supor que a área do círculo seja menor do que a área do triângulo retângulo, ou seja, A_C<K.*

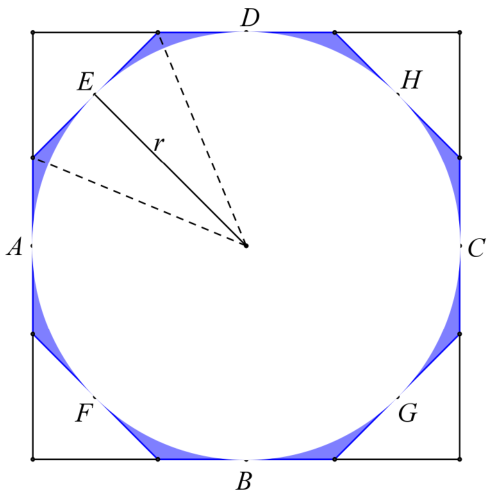
Circunscrevemos um quadrado ao círculo, como na figura, sendo A, B, C, D os pontos onde o círculo e o quadrado se tangenciam.





Se a soma das áreas entre o quadrado e o círculo for maior do que K-A_C, consideramos os pontos médios E, F, G, H dos arcos AB, BC, CD, DA, respectivamente. Assim, obtemos um octógono circunscrito ao círculo. Novamente, se a soma das áreas entre o octógono e o círculo for maior do que K-A_C, consideramos os pontos médios dos arcos AF, FB, ... , DE, EA, obtendo da mesma forma um polígono regular de 16 lados circunscrito ao círculo. Este processo pode ser continuado até obter um polígono p_n circunscrito cujos espaços entre ele e o círculo, somados, são menores do que K-A_C. Seja P_n a área do polígono p_n. Então P_n-A_C<K-A_C, o que implica

$$P_n < K. \qquad (3)$$



Os segmentos perpendiculares a cada um dos lados de p_n até o centro do círculo são iguais ao raio r do círculo e o perímetro p do polígono é maior do que a circunferência c do círculo. Logo, como a área P_n do polígono é igual à soma das áreas de n triângulos isósceles congruentes de altura r, temos $P_n=(1/2)pr > (1/2)c.r=K$, e portanto

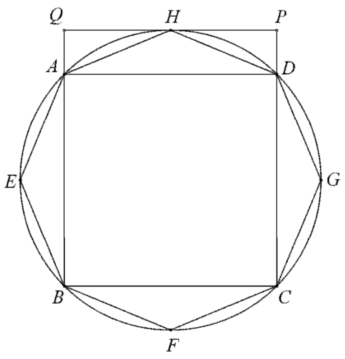
$$P_n > K. \qquad (4)$$

Por (3) e (4), temos uma contradição, o que implica que a área do círculo A_C não pode ser menor do que K, como supusemos inicialmente.

(IV) Finalmente, como de (II) e (IV) a área do círculo não é maior e nem menor do que K, só pode ser igual a K, ou seja, *a área do círculo é igual à área do triângulo retângulo de área K.*

(**) Observação. É intuitivo que o que é afirmado em **(**)** no item (II) acima irá ocorrer depois de um numero finito de subdivisões. No formalismo atual da Matemática argumentamos que isto decorre do fato que o limite da diferença entre da área do círculo e os polígonos assim construídos é zero e, portanto, esta ficará menor do que qualquer número positivo, como é o caso de A_c-K, após um número grande de passos. Esta idéia do "tão pequeno quanto se queira" já consta do teorema de Euclides Livro X. 1 : *Considerando duas grandezas distintas, se subtrairmos da maior uma outra maior do que sua metade, e desta uma outra maior do que sua metade e, assim por diante, obteremos finalmente uma grandeza que será menor do que a grandeza menor considerada inicialmente*. No caso aqui considerado, as hipóteses deste teorema são satisfeitas, tomando-se a grandeza menor inicial como sendo A_c-K e a grandeza maior inicial como sendo

(A_c-área do quadrado), da qual serão subtraídas sucessivamente as áreas triangulares que formam o polígono seguinte (resultando nas regiões vermelhas). Isto pode ser verificado geometricamente a partir da constatação de que das áreas dos triângulos acrescentados em cada passo são maiores do que metade da parte do círculo em que ele está “inscrito”.



Note que na ilustração a área do triângulo AHD é igual à metade da área do retângulo ADPQ e, como a área deste retângulo é maior do que a área entre a corda AD e o arco ADH da circunferência, temos que a área do triângulo é maior do que a metade da área entre a corda AD e o arco AHD da circunferência.

Comentário Final

A constatação de que a área de um círculo é proporcional ao quadrado de seu diâmetro e, portanto, de seu raio R (área do círculo=$k.R^2$), é anterior a Arquimedes. Este fato é usualmente atribuído a Hipócrates de Quios (C. 430 AC) e é encontrado em detalhes nos Elementos de Euclides (C. 325 AC), vol XII, 2. Note que este resultado junto com o de Arquimedes acima mencionado permite concluir que para qualquer círculo, tanto área dividida pelo raio ao quadrado quanto a medida do perímetro dividido pelo diâmetro *dá o mesmo número* que é um pouco maior que três. Arquimedes, usando dois polígonos de 96 lados, um inscrito e outro circunscrito a um círculo, concluiu que este número, o qual só foi chamado de Pi (π), muito depois, estava entre $3+\frac{10}{71}$ e $3+\frac{1}{7}$ (ver atividade 3 da seção *Depois da execução*)

O cálculo aproximado da área de um círculo já era feito muito antes dos gregos pelos babilônios e egípcios que usavam o que seria equivalente a considerar π como sendo $3+\frac{1}{8}$ e $4\times\left(\frac{8}{9}\right)^2$, respectivamente.

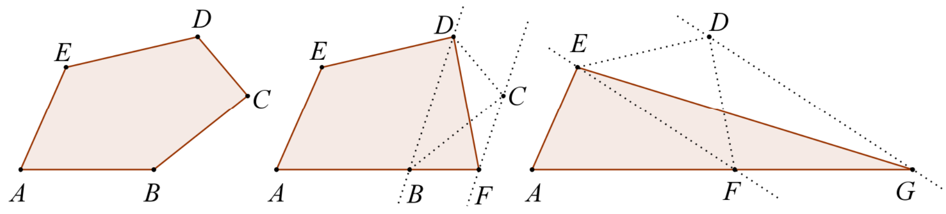
Sugestões de atividades

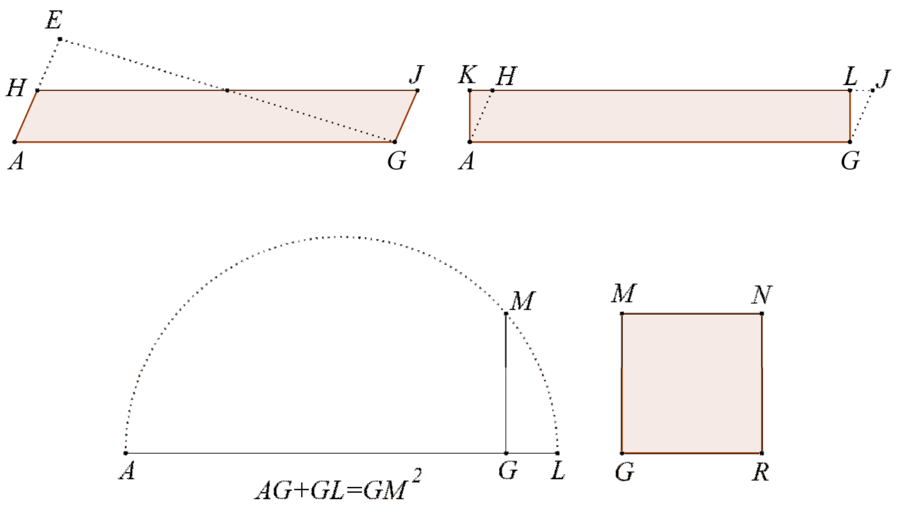
Antes da execução

Atividade 1

***A quadratura de um polígono de n lados*.**

Retomando a abordagem de áreas no período grego (Euclides (C. 325 A.C.), vol II), pode ser proposto a grupos de 2 a 4 alunos que desenhem um polígono de 5 lados e construam com régua e compasso um quadrado com mesma área do polígono desenhado. O esquema abaixo deve ser fornecido, pedindo que eles expliquem em cada passo o porque da área não se altera de uma figura para outra e também como executaram as construções com régua e compasso. Esta atividade possibilita uma excelente revisão de fatos fundamentais de geometria plana e motiva para questões que serão que serão abordadas no vídeo. Questões naturais que podem ser destacadas durante esta atividade são: Onde entra o teorema de Pitágoras para justificar nesta sequência figuras de mesma área? Este procedimento de encontrar um quadrado de mesma área pode ser aplicado a um polígono com qualquer número de lados?





$ABCDE \rightarrow AFDE \rightarrow AGE \rightarrow AGJH \rightarrow AGLK \rightarrow GRNM$

Depois da execução

Atividade 1

“Quadratura” de um círculo usando barbante, régua e compasso

Sugerir aos grupos de alunos que desenhem um circulo grande, contornem seu comprimento com um barbante, e obtenham o triangulo retângulo de área equivalente (Arquimedes). Eles deverão então calcular a área deste triangulo e comparar com o valor da área do círculo original usando a expressão tradicional (Área = π r^2). Finalmente, partindo do triângulo, eles poderão construir com régua e compasso o quadrado de mesma área do círculo e comparar os valores numéricos obtidos. Observar a diferença desta construção para o da quadratura do polígono da seção *Antes da execução* (não foi necessário no caso do polígono de n lados medir perímetro: o uso de régua e compasso foi suficiente).

Observação: Esta atividade, colocada em contraste com a de antes da execução, proporciona uma ótima oportunidade para se abordar o famoso problema da *quadratura do círculo* (Construção de um quadrado com a mesma área de um círculo, usando **apenas** régua e compasso. Como é conhecido, este problema abordado desde a antiguidade só foi resolvido no século dezenove, quando foi demonstrada a impossibilidade de tal construção.

Atividade 2

A área de círculo como limite de área de polígonos regulares

Esta segunda questão que pode ser proposta aos alunos possibilita também uma revisão do significado das funções seno e cosseno e uma idéia intuitiva de limite, através de uma sequência que converge para o número π.

A. Deduzir, a partir da decomposição em triângulos e expressões trigonométricas a seguinte expressão para a área de um polígono regular de n lados inscrito num círculo de raio R:

$$A_n = nR\cos\left(\frac{360^o}{n}\right)Rsen\left(\frac{360^o}{n}\right) =$$
$$= R^2\frac{n}{2}Sen\left(\frac{360^o}{n}\right)$$

B. Observe que, como a área destes polígonos se aproxima da área do círculo quando n cresce muito, a expressão $\frac{n}{2}Sen\left(\frac{360^o}{n}\right)$ tem que se aproximar do número π. Use um computador ou uma calculadora que tenha valores para a função seno e teste o valor desta última expressão para valores grandes de n.

Atividade 3

Inspirando-se em Arquimedes para uma estimativa do número π.

O seguinte procedimento dá uma idéia de como se obter um valor aproximado para o número π num esquema que se inspira na estimativa de Arquimedes.

A. Considere inicialmente um hexágono regular inscrito numa circunferência: qual a razão entre o perímetro do Hexágono e o diâmetro do círculo?

B. Divida cada arco definido pelo hexágono em dois e considere agora polígono regular de doze lados. Procure determinar, usando o Teorema de Pitágoras, o lado e depois o perímetro deste polígono em função do raio do círculo. Qual o número que dá a razão entre perímetro e o diâmetro do círculo?

C. Porque você pode afirmar que a razões encontradas em A. e B. são números menores do que o numero π?

D. De que forma você poderia continuar este procedimento para obter um numero ainda mais próximo de π?

Atividade 4

Este vídeo pode ser um grande motivador para os alunos investigarem em livros e na internet sobre os trabalhos de Arquimedes e a importância destes no desenvolvimento da matemática. Também poderão procurar sobre a história do número π e o problema da quadratura do círculo. Estas informações podem ser trazidas e discutidas numa aula posterior.

Sugestões de leitura

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio. Volume* 2, Coleção do Professor de Matemática, (3ª Edição). Rio de Janeiro: SBM, 2000.

LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria.* Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* 4ª. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

BARON, Margaret E. *Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo – Unidade 1 - A Matemática Grega.* Editora Universidade de Brasília, 1985.

COSTA, Sueli I. R.. *"O Método" de Arquimedes em História e Tecnologia da Matemática.* Volume II, p. 61-76. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.
COSTA, Sueli I. R.; GROU, Alice; Passos, Fernando. *Programa de vídeo: Pela Trilha de Arquimedes.* Editora da Unicamp, 2002.

Ficha técnica

Autoras: *Sueli I. R. Costa e Claudina Izepe Rodrigues*
Revisor: *Roberto Limberger*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico: *Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*