Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Roda de Samba

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar uma aplicação de funções quadráticas;
2. Analisar pontos de máximo de uma parábola;
3. Avaliar o comportamento da parábola com variações em um coeficiente da função quadrática correspondente.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Roda de Samba

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Função Quadrática.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar uma aplicação de funções quadráticas;
2. Analisar pontos de máximo de uma parábola;
3. Avaliar o comportamento da parábola com variações em um coeficiente da função quadrática correspondente.

Sinopse
Deco, após conversar com um contador, explica para Dona Gera como foi calculado o preço do ingresso de uma festa na comunidade. Usando uma função quadrática, eles encontram o valor de ingresso que deve maximizar o lucro.

Material relacionado
Vídeos: *O problema da cerca, Esse tal de Bháskara;*
Áudios: *O que é parábola?;*
Experimentos: *Otimização da cerca, Polígonos e círculos;*
Softwares: *Otimização de janelas.*

Introdução

Sobre a série

A série *Matemática na Escola* aborda o conteúdo de matemática do Ensino Médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático; além disso, pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa aborda um problema de maximização do lucro gerado por uma festa. O personagem Deco explica a Dona Gera como calcular o preço a ser cobrado por pessoa, de modo a maximizar o lucro obtido.

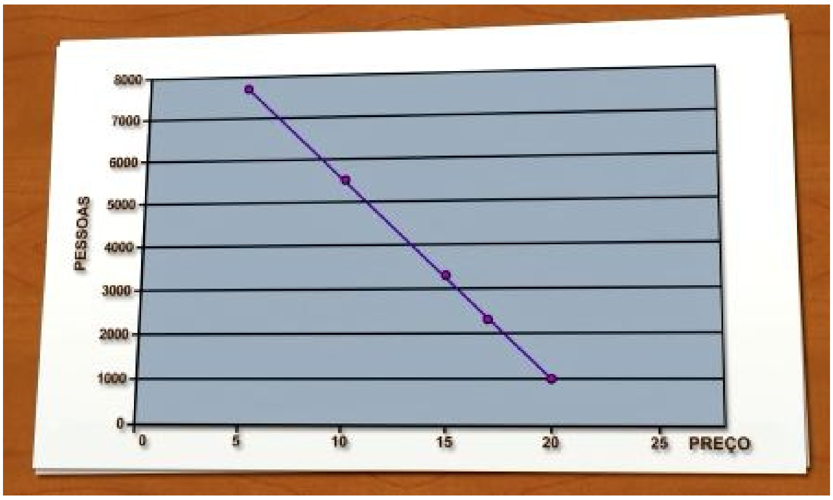
Esse vídeo mostra uma aplicação de função quadrática e pode ser utilizado para introduzir o cálculo de máximos e mínimos desse tipo de função.

Durante a conversa com Dona Gera, Deco relembra o preço e o número de presentes em cada festa anterior. A partir desses dados, ele traça uma reta que mostra a variação da quantidade de pessoas em função do preço do ingresso, concluindo, como era de se esperar, que quanto mais alto o preço, menor o número de presentes.

A equação obtida foi:

$$y = 10.000 - 450\,x,$$

onde 10.000 pode ser interpretado como o número de pessoas que iriam se o ingresso fosse grátis.



Para o cálculo do lucro, é necessário saber o valor dos gastos que, neste caso, foi fixado em R$ 656,00.

O cálculo do lucro, ou arrecadação, será dado por uma função quadrática, pois

$$A(x) = (\text{número de pessoas})\ x - \text{gastos},$$

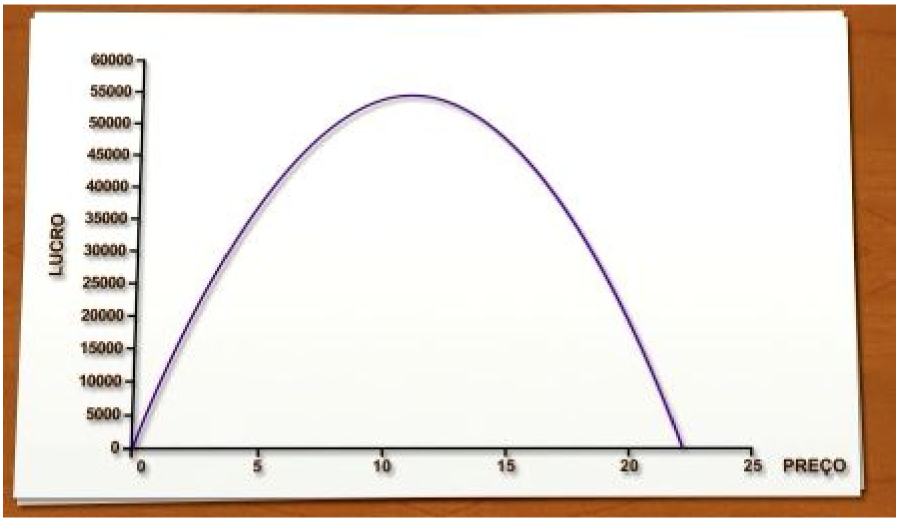
onde x é o preço do ingresso. Mas sabemos que o número de pessoas também é uma função de x. Assim, teremos:

$$A(x) = (10.000 - 450\,x)\,x - 656$$

$$= -\,450\,x^2 + 10.000\,x - 656.$$

O gráfico dessa função é uma parábola com concavidade para baixo, pois o coeficiente do termo quadrático é negativo.

Traçado o gráfico de preço x lucro, Deco explica que o lucro máximo é a coordenada y do vértice da parábola. Portanto, para saber o melhor preço a ser cobrado, basta encontrar a coordenada x correspondente e, assim, é deduzida uma fórmula para obter esse valor a partir dos coeficientes da função.



Uma observação feita no vídeo é que, devido à diferença nas escalas dos eixos, temos a impressão de que a parábola passa pela origem, mas na verdade, se o ingresso for grátis, em vez de lucro, há um prejuízo de R$656,00.

É importante notar que o vértice da parábola não necessariamente refere-se a pontos de máximo, como sugere o vídeo, podendo estar associada a pontos de mínimo também, dependendo da concavidade da parábola em questão.

Por último, é calculado o número de pessoas necessário para que o lucro esperado seja atingido, que depende do x do vértice, usando a equação obtida inicialmente, $y = 10.000 - 450\,x$.

Sugestões de atividades

Depois da execução

Após terminar o vídeo, retome com os alunos, se necessário, os passos para se obter a coordenada x do vértice de uma parábola a partir dos coeficientes da função quadrática:

$$x_v = \frac{-b}{2a},$$

de onde se conclui que não é necessário calcular as raízes da quadrática para encontrar este ponto.

Feito isso, podem ser sugeridas aos alunos variações do problema, como, por exemplo, mudar o valor do gasto fixo.

A seguinte questão pode ser feita: se o gasto fixo diminuir, por exemplo, para 300 reais, o que acontece com o preço ótimo do ingresso? E com o lucro? E se o gasto aumentar para 1000 reais?

Essa mudança não altera o valor ótimo do ingresso, pois a parábola sofre apenas um deslocamento vertical quando mudamos o termo independente que, nesse caso, é dado apenas pelos gastos fixos da festa.

Uma segunda variação seria propor que além do gasto fixo haja um gasto adicional que dependa do número de pessoas presentes. Por exemplo, pode-se supor que os gastos desta festa sejam 600 reais fixos, mais R$3,50 por pessoa, ou que todo o gasto dependa do número de pessoas, com 5 reais por cada presente a festa. Nesses casos, como ficaria a equação da quadrática? As mesmas perguntas do caso anterior devem ser feitas.

No primeiro caso, o gasto seria dado por

$$gastos = 600 + 3{,}50 \cdot (número\ de\ pessoas)\,.$$

Portanto, para a função do lucro, teríamos

$$-450x^2 + 10000x - [600 + 3{,}5 \cdot (-450x + 10000)] =$$

$$= -450x^2 + 11575x - 35600$$

E o preço do ingresso seria

$$x_v = \frac{-11575}{900} = 12{,}86 \sim 13\ reais.$$

Para o segundo caso, os gastos seriam

$$gastos = 5{,}00 \cdot (número\ de\ pessoas),$$

a função quadrática do lucro seria

$$-450x^2 + 10000x - [5 \cdot (-450x + 10000)] =$$

$$= -450x^2 + 12250x - 50000,$$

e, desta vez, o ingresso seria

$$x_v = \frac{-12250}{900} = 13{,}61,$$

que, para evitar troco, pode ser aproximado para 14 reais.

Além desta variação acima, sugerimos os seguintes problemas:

Problema 1: Os alunos de uma escola fretaram para sua viagem de formatura um avião com 200 lugares. Cada formando comprometeu-se a pagar R$400,00 e mais um adicional de R$4,00 para cada colega que desistisse da viagem.

a. Encontre a receita obtida caso 20 estudantes desistam da viagem;

b. Obtenha a equação da receita (R) em função da quantidade (x) de alunos que não desistirem da viagem;

c. Determine a quantidade de estudantes que não deverão desistir da viagem para que a receita gerada seja máxima e também o valor dessa receita.

Solução:

a. Se 20 estudantes desistirem da viagem, cada um dos 180 estudantes que não desistir terá de pagar R$400,00 e mais um adicional de R$4,00 para cada um dos 20 lugares vagos.

$R = 180(400 + 20.4) = 180(480) = 86400$. Logo, a receita gerada nesse caso é de R$86.400,00.

b. Sendo x o número de estudantes que não desistiram da viagem, tem-se:

$$R(x) = x(400 + (200 - x)4) = -4x^2 + 1200x.$$

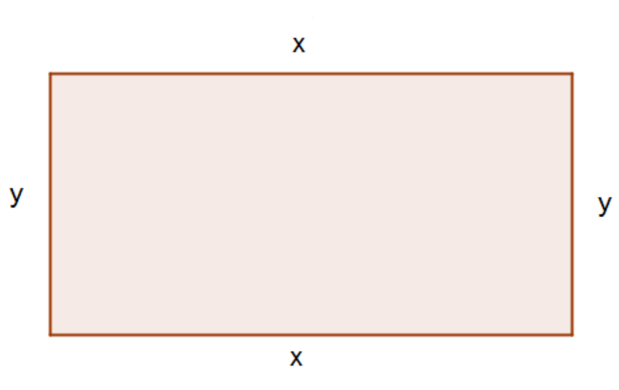
c. Como a função é quadrática com $a < 0$, a receita máxima é obtida para $x = x_v$, ou seja, a função é máxima para $x = \frac{-1200}{-8} = 150$ e $R_{máx} = -4(150)^2 + 1200(150) = 90000$. Assim, a receita máxima, obtida com a presença de 150 estudantes, é de R$90.000,00.

Comparando com o item anterior, notamos que se forem 180 estudantes, a receita de R$86.400,00 será menor do que a receita de R$90.000,00, gerada com a presença de 150 estudantes.

Problema 2: Um agricultor precisa cercar um espaço reservado para uma horta com formado retangular. A cerca para três lados da horta custa R$20,00 por metro e a cerca para o quarto lado custa R$30,00 por metro. Sabendo-se que o agricultor dispõe de R$600,00 para gastar com a cerca, que dimensões ele deve dar a esse espaço para maximizar a área?

Solução:

Em três dos lados (x, x, y) do retângulo da figura, o custo da cerca é R$20,00 por metro, e no outro lado (y) é R$30,00. Como o custo deverá ser de R$600,00, tem-se a equação:



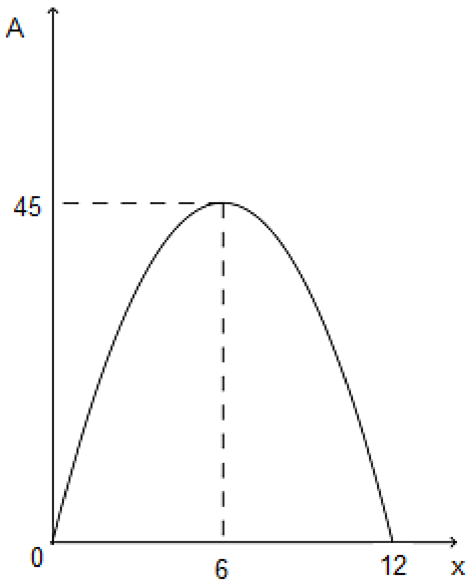
$20(2x+y)+30y=600$

Isolando y, obtém-se: $y=12-\frac{4}{5}x$.

A área da horta retangular é dada por $A=xy$. E daí, $A=x\left(12-\frac{4}{5}x\right)$. Ou seja, $A=-\frac{4}{5}x^2+12x$.

Esta função quadrática admite a área máxima para $x=x_v=\frac{-12}{-\frac{8}{5}}=7{,}5$.

Sendo $x=7{,}5$, tem-se que $y=12-\frac{4}{5}(7{,}5)=6$.

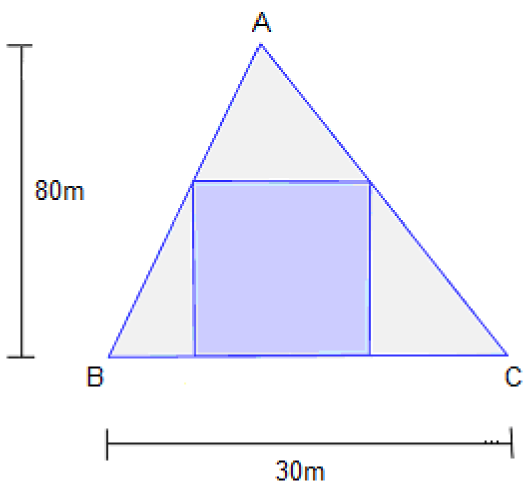


Portanto, para maximizar a área da horta, suas dimensões devem ser 7,5m e 6m.

Observemos que a área máxima da horta é $(7{,}5)6=45m^2$.

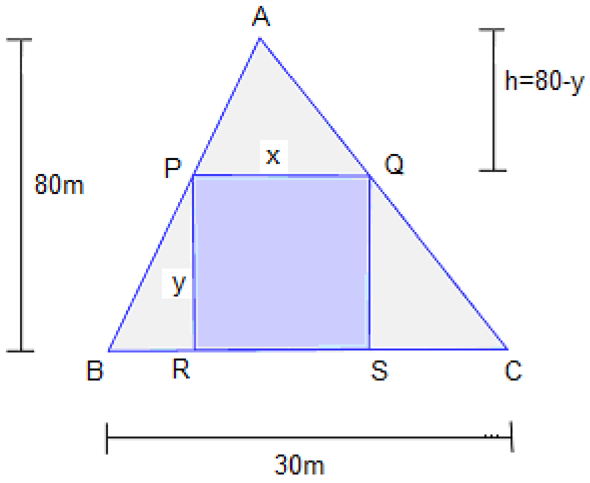
Façamos também o esboço do gráfico desta função.

Problema 3: Deseja-se construir uma piscina retangular num terreno triangular cuja vista superior está representada na figura. Determine as dimensões (comprimento e largura) que deverá ter a piscina para que a



área de sua superfície seja máxima.

Solução:



Da semelhança dos triângulos APQ e ABC, vem:

$$\frac{h}{80}=\frac{x}{30}\Rightarrow h=\frac{8}{3}x\Rightarrow 80-y=\frac{8}{3}x\Rightarrow y=80-\frac{8}{3}x$$

A área do retângulo é dada por $A=xy$. Tem-se então que $A=x\left(80-\frac{8}{3}x\right)$.

O valor máximo da função quadrática $A=-\frac{8}{3}x^2+80x$ ocorre para $x=x_v=\frac{-80}{-\frac{16}{3}}=15m$. E daí, $y=80-\frac{8}{3}(15)=80-40=40m$. Logo, a área máxima da superfície dessa piscina deverá ser $A=15.40=600m^2$.

O professor poderá comentar com os alunos que o valor de x é a metade da base BC do triângulo ABC e que isso ocorre em qualquer triângulo. E desse fato decorre que a área do retângulo é a metade da área do triângulo.

Sugestões de leitura

Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1 – Funções (2004), Gelson Iezzi e Carlos Murakami.

Ficha técnica

Autores *Rafael Santos de Oliveira Alves, Leonardo Barichello e Luis Mesquiari*
Revisão *Samuel Rocha de Oliveira e José Plínio dos Santos*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*