Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Qual o melhor caminho?

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Introduzir a métrica do taxista através de um exemplo cotidiano;
2. Aplicar o conceito de permutação com repetição;
3. Mostrar algumas identidades combinatórias.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Qual o melhor caminho?

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Combinatória; métrica do taxista; permutação com repetição.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Introduzir a métrica do taxista através de um exemplo cotidiano;
2. Aplicar o conceito de permutação com repetição.

Sinopse
Sinopse
O motoboy Romário necessita entregar uma encomenda em duas horas. Com a ajuda da sua amiga Grasi e através de conceitos combinatórios, aprende quais os melhores caminhos possíveis a serem feitos.

Material relacionado
Vídeos: *Cooperativa do leite;*
Experimentos: *Estradas para a estação, Onde fica a lixeira;*
Softwares: *Geometria do Táxi – Contagem, Geometria do Táxi – Formas Geométricas*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa aborda assuntos combinatórios no contexto da métrica do taxista, também chamada de métrica l_1 ou métrica Manhattan. Usualmente, esse conceito de métrica não é apresentado aos alunos de ensino médio, entretanto ele surge naturalmente ao tratarmos de algumas aplicações práticas como a busca do caminho mínimo em uma cidade dividida por quarteirões, na qual é necessário substituir a métrica euclidiana usual pela do taxista.

A distância (do taxista) entre dois pontos p e q do plano cartesiano tais que $p = (p_1, p_2)$ e $q = (q_1, q_2)$ é definida por:

$$d(p,q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|.$$

Esse conceito de distância possui um apelo geométrico bastante interessante. Por exemplo, a “circunferência” na métrica do taxi – ou seja, o conjunto de pontos que distam de um certo raio R de um outro ponto – é na realidade um losango, como pode ser visto na figura abaixo.

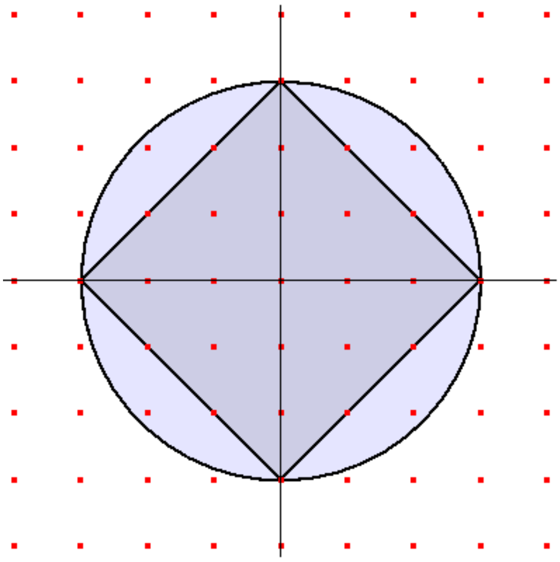

Figura 1: Conjunto de pontos com distância da origem menor do que ou igual a 3 nas métricas euclidiana (circunferência) e do taxista (losango).

Aplicada em pontos com coordenadas inteiras do plano cartesiano, a métrica do taxista possui um grande apelo combinatório, como mostrado no vídeo. O problema de qual o menor caminho entre um ponto e outro resume-se a calcular a distância entre os dois pontos e encontrar qualquer conjunto de ruas verticais e horizontais que realizam essa distância, conforme mostrado na Figura 2 abaixo.

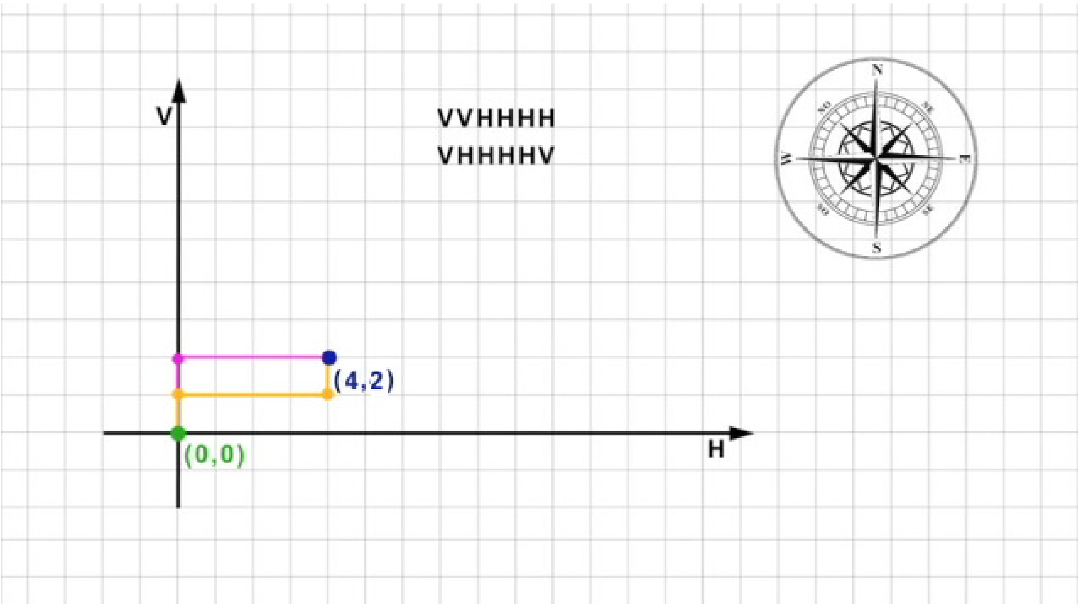

Figura 2: Dois possíveis caminhos entre os pontos $(0,0)$ e $(4,2)$.

Observe com os alunos que a versão atual do vídeo tem as coordenadas (4,2) trocadas.

No caso da Figura 2, a distância do taxista entre os pontos é 6 e pode ser realizada por vários caminhos, enquanto a distância euclidiana usual é $\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}\approx 4.47$ e é realizada pelo segmento de reta reto que passa pelos pontos $(0,0)$ e $(4,2)$. No contexto da aplicação prática mostrada no vídeo (uma cidade divida por quarteirões), não seria possível realizar a distância euclidiana.

A questão da quantidade de caminhos possíveis, por sua vez, é resolvida usando-se o argumento de que qualquer conjunto de duas ruas verticais (V) e quatro horizontais (H) no sentido do ponto $(4,2)$ a partir do $(0,0)$ realiza a distância mínima 6. Assim, o problema torna-se um problema combinatório de como escolher, dentre 6 ruas, 4 horizontais e 2 verticais. De fato, dado um ponto qualquer $p=(p_1,p_2)$, com p_1 e p_2 positivos, o número de caminhos possíveis até a origem é:

$$C_{p_1+p_2}^{p_1}=C_{p_1+p_2}^{p_2}=\frac{(p_1+p_2)!}{p_1!\ p_2!},$$

pois a distância de p até a origem, neste caso, é p_1+p_2.

Esse problema pode ser visto no contexto das permutações com repetição, que trata de conjuntos com vários elementos repetidos. Dado um conjunto com n elementos com n_1 elementos iguais do tipo 1, n_2 do tipo 2, e assim sucessivamente até n_k elementos do tipo k, a quantidade de permutações que podemos formar com estes elementos é dada por:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k}$$

Considerando o problema do menor caminho até o ponto p, temos um conjunto de p_1+p_2 ruas, onde p_1 são horizontais e p_2 verticais, ou seja, temos uma permutação com repetição. De fato, qualquer combinação de n elementos agrupados k a k pode ser escrita como uma permutação com k elementos repetidos de um tipo e $n-k$ de outro.

Além deste problema, existem vários outros problemas combinatórios e geométricos associados à métrica do taxi, desenvolvidos, por exemplo, nos softwares "Geometria do Táxi – Contagem" e "Geometria do Táxi – Formas Geométricas"

Sugestões de atividades

Antes da execução

Antes do programa pode-se colocar, por exemplo, o problema de qual a menor distância entre dois pontos no plano (do ponto de vista euclidiano) e de como realizar esta distância. Em seguida, pode-se propor o problema de qual a menor distância entre esses dois pontos considerando que eles estão na esquina de quarteirões, com o auxílio de desenhos na lousa. Os alunos serão estimulados a pensar de maneira natural na distância do taxista.

Depois da execução

Os problemas abaixo são apresentados com o propósito de fixar e aprofundar o assunto abordado no programa.

Problema 1: Suponhamos que um construtor necessita subir um andaime no qual, de cada canto, possui três possibilidades: ir à direita, ir à frente ou subir ao andar de cima, isto é, o construtor pode mover-se nas três direções do espaço. Se considerarmos o seu ponto inicial como o $(0,0,0)$ e o ponto de chegada como o $(2,4,3)$, de quantas maneiras o construtor poderá ir ao ponto de chegada de modo a fazer o menor número de deslocamentos possíveis?

Solução: Esse problema é análogo à questão proposta no vídeo e pode ser resolvido utilizando a teoria de permutações com repetição. Para que o construtor cumpra o caminho mínimo, é necessário dar 2 passos à direita, 4 à esquerda e 3 para cima, em qualquer ordem. Assim, temos uma permutação de 9 elementos com 2 passos à direita, 4 à esquerda e 3 idas acima, ou seja, a quantidade de caminhos é:

$$\frac{9!}{2!\,3!\,4!} = \frac{9.8.7.6.5}{2.3!} = 9.4.7.5 = 1260.$$

Problema 2: Qual o número de pontos inteiros que estão a uma certa distância do taxista n da origem? Por exemplo, para $n = 2$, há 8 pontos que distam 2 da origem, são eles: $(\pm1, \pm1), (\pm2, 0), (0, \pm2)$.

Solução: É recomendável que este exercício seja feito em duas etapas, primeiramente tentando inferir o resultado através de exemplos numéricos. Consideramos a primeira pergunta temos:

Para $n = 1$, há 4 pontos. Para $n = 2$, há 8 pontos e para $n = 3$ há 12 pontos, donde é razoável inferir que o número de pontos que distam exatamente n da origem é $4n$, para $n \geq 1$.

Isso pode ser demonstrado da seguinte maneira:

Resolvemos primeiro para o primeiro quadrante. Queremos o número de soluções para $x + y = n$ com x e y não-negativos. Em outras palavras, queremos encontrar os pontos de coordenadas inteiras no segmento de reta que vai de $(n, 0)$ até $(0, n)$ como pode ser visto na Figura 1. É fácil ver que há $n + 1$ pontos neste segmento $(0, n), (1, n-1), (2, n-2), \ldots (n, 0)$. No segundo quadrante, também temos $n + 1$ pontos, entretanto o ponto $(0, n)$ já foi considerado anteriormente, e portanto devemos levar em conta apenas n pontos. Para o terceiro quadrante, o raciocínio é análogo, e a quantidade de pontos no segmento é n. No quarto quadrante, entretanto, há dois pontos que já foram contados: $(n, 0)$ e $(0, -n)$ e portanto devemos considerar apenas $n - 1$ pontos. No total temos $(n + 1) + n + n + (n - 1) = 4n$ pontos.

Sugestões de leitura

Carvalho, Paulo Cezar Pinto. **MÉTODOS DE CONTAGEM E PROBABILIDADE.**

obmep, 2005.
Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**, Vol 3, Coleção do Professor de Matemática, (3ª Edição). Rio de Janeiro: sbm, 2000.
Krause, Eugene F. **Taxicab Geometry**. New York: Dover, 1986.
Veloso, Eduardo. **Geometria: Temas Actuais**. Materiais para professores. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 2000.

Ficha técnica

Autor *Antônio Campello*
Revisão *José Plínio de Oliveira dos Santos*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Caio José Colletti Negreiros*
Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*