Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Procurando Xenakis

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar a demonstração do teorema da infinitude dos números primos;
2. Introduzir o Crivo de Eratóstenes;
3. Mostrar aplicações da Teoria dos Números.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância | Ministério da Ciência e Tecnologia | Ministério da Educação | Governo Federal

Procurando Xenakis

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Crivo de Eratóstenes; Teorema da Infinitude dos Primos; Teoria dos Números

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar a demonstração do teorema da infinitude dos números primos;
2. Introduzir o Crivo de Eratóstenes.

Sinopse
O jovem Pedro, aspirante a músico, procura pelo compositor Iannis Xenakis. Durante esta busca, irá conhecer alguns conceitos de Teoria dos Números e suas aplicações.

Material relacionado
Áudios: *Formigas e primos;*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa aborda dois temas centrais da Teoria dos Números: o Crivo de Eratóstenes e a infinitude dos números primos. Os assuntos tratados são relacionados com a obra do famoso arquiteto e compositor Iannis Xenakis, nascido na Grécia no ano de 1922 e falecido na França em 2001. Neste sentido, o vídeo também introduz os alunos a aplicações dos conceitos abordados.

Iannis Xenakis utilizava diversos princípios matemáticos tanto na sua música quanto na arquitetura, proporcionando uma interessante relação entre música eletrônica, arquitetura e matemática. Esta relação é evidenciada em um dos seus mais famosos trabalhos, o Pavilhão Philips, apresentado no vídeo.

O Crivo de Eratóstenes, por sua vez, é um mecanismo para a listagem de números primos. Apesar de datar da Grécia Antiga, o crivo ainda é utilizado na prática para listagens simples de números, por sua simplicidade. Além disso, alguns algoritmos eficientes para listar números na atualidade são fortemente baseados no Crivo de Eratóstenes, como por exemplo, o Crivo de Atkin.

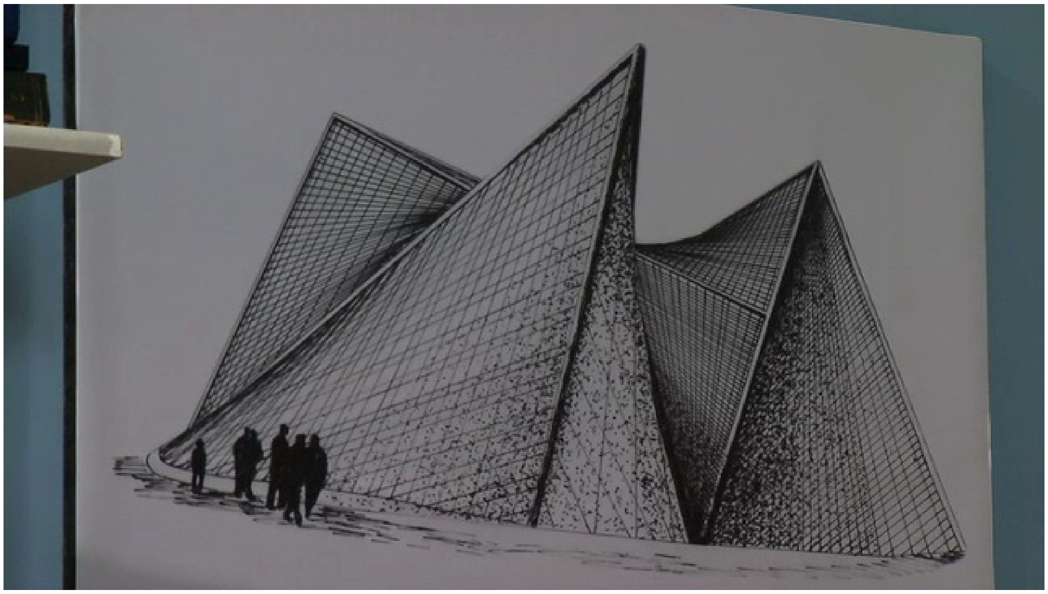

Figura 1: Pavilhão Philips, projetado para a Expo 58, em Bruxelas

Suponhamos que queremos listar todos os números primos de 2 até n. De acordo com o Crivo de Eratóstenes, deve-se primeiramente eliminar todos os múltiplos de 2 neste intervalo. Em seguida, devemos eliminar todos os múltiplos do próximo primo, o número 3, e assim sucessivamente. Uma importante propriedade deste procedimento é a de que necessitamos repeti-lo somente até o maior primo menor do que ou igual a $\sqrt{n}$. Portanto, se quisermos listar todos os números primos de 1 até 100, temos que eliminar os múltiplos de 2, 3, 5 e 7.

Apesar de simplificar a lista, o Crivo de Eratóstenes possui uma alta complexidade computacional, isto é, não pode ser aplicável em tempo hábil a números primos muito grandes.

A infinitude dos primos é outro tema tratado pelo vídeo. Apesar de ser de senso comum o fato de que a quantidade de números primos é infinita, a sua demonstração original não é tão direta. Ela exige o uso de uma fina técnica matemática: a prova por contradição (ou redução ao absurdo).

Tal prova está apoiada em princípios de lógica clássica e baseia-se em negar a hipótese que se quer demonstrar e, concatenando logicamente, encontrar uma contradição partindo desta hipótese. Esse tipo de prova, apesar de bastante elegante, é algumas vezes evitado pelos matemáticos por não chegar de maneira direta ao resultado desejado. Dentre os outros tipos de demonstração estão a prova direta, a demonstração construtiva e a indução matemática.

Além da infinitude dos primos, existem alguns fatos matemáticos clássicos cujas demonstrações são tipicamente feitas através de uma prova por contradição. Dentre eles, pode-se destacar o Argumento de Diagonalização de Cantor (para mostrar que os números reais não são enumeráveis) e a demonstração de que o número $\sqrt{2}$ não é racional. Esta última, de simples execução, mostra claramente o conceito de redução ao absurdo. Vamos a ela:

Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional. Então existe uma fração irredutível tal que $p/q = \sqrt{2}$. Portanto:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Isso quer dizer que p^2 é um número par e, por conseguinte, p é par, portanto podemos escrevê-lo como $p = 2r$. Neste caso:

$$(2r)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow 2r^2 = q^2$$

Pelos mesmos motivos anteriores, temos que q é par, o que é absurdo, por que a fração p/q é irredutível. Assim, temos que $\sqrt{2}$ não pode ser racional.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Antes da execução sugere-se que sejam repassados alguns conteúdos acerca dos números primos, como sua definição e algumas propriedades básicas. Também pode-se questionar acerca da sua infinitude. Um interessante exercício é pedir para que sejam listados todos os primos até um determinado número plausível (por exemplo, 25), para mostrar a dificuldade de executar esta tarefa, a priori. A solução é: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Depois da execução

Depois da execução, são propostos alguns problemas com o objetivo de ilustrar e expandir os conteúdos abordados no texto.

Problema 1. Repetir o exercício anterior da listagem de números primos até o 25 através do Crivo de Eratóstenes. Fazer o mesmo para todos os primos menores do que 40.

Solução Ilustra-se, neste exercício, que com a técnica do crivo é possível fazer a lista até números bem maiores que o simples teste de todos os números. Por exemplo, no caso dos primos menores que 40, após escrever todos os números em um papel, será necessário apenas eliminar os múltiplos de 2, 3, e 5. A solução é: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 e 37.

Problema 2. Durante a demonstração do teorema da infinitude dos primos, é definido o seguinte número:

$$q = p_1 p_2 \dots p_n + 1,$$

onde $p_1, p_2, \dots, p_n$ são os n primeiros números primos e, por contradição, chega-se à conclusão de que esse número deve ser composto. Verifique que, a depender do valor de n, o número q pode ser primo ou composto.

Solução: Para $n = 2,3,4,5$ temos que q é um número primo. Para $n = 6$ temos que o número $q = 2 * 3 * 5 * 7 * 11 * 13 + 1 = 30031$ é divisível por 59. Esta tarefa pode ser árdua se feita sem auxílio computacional, portanto pode ser sugerido aos alunos que apenas verifiquem que este número é divisível por 59, efetuando uma divisão.

Problema 3. Dois números primos são chamados de primos gêmeos quando a diferença entre o maior e o menor é 2. O primeiro par de primos gêmeos é o (3,5) e atualmente são conhecidos pares de primos gêmeos extremamente grandes, com até 100355 dígitos. Encontre os 5 primeiros pares de primos gêmeos.

Solução: A solução é: (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29, 31) e pode ser encontrada por simples testes. Vale lembrar que a infinitude dos números primos gêmeos ainda é um fato sem demonstração, apesar da simplicidade do seu anunciado. Com isso, os alunos podem ter contato com uma importante conjectura matemática.

Sugestões de leitura

José Plínio de Oliveira Santos (2000). Introdução à Teoria dos Números. Publicação IMPA.

Marcus du Sautoy (2007). A música dos números primos: a história de um problema não resolvido na matemática. Editora Jorge Zahar.

Site recomendado: (inglês ou francês) Site oficial de Iannis Xenakis. Nele pode-se ouvir algumas de suas composições: http://www.iannis-xenakis.org

Ficha técnica

Autor *Antônio Campello*
Revisão *José Plínio de Oliveira Santos*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*