



Guia do Professor



Vídeo


Pra lá de Bagdá

Série Matemática na Escola

Objetivos

1. Apresentar sequências numéricas
2. Introduzir progressões geométricas, seu termo geral e a soma dos seus termos.
3. Apresentar a função exponencial.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 

Prá lá de Bagdá

Série

Matemática na Escola

Conteúdos

Progressão geométrica.

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivos

1. Apresentar sequências numéricas
2. Introduzir progressões geométricas, seu termo geral e a soma dos seus termos.
3. Apresentar a função exponencial.

Sinopse

Um rei está entediado com suas atividades e o seu servo lhe sugere várias opções de entretenimento, mas o rei não se interessa. Então, o sábio do reino apresenta ao rei um jogo, que é o antecessor do jogo do xadrez e ensina o rei a jogá-lo. Eles jogam muitas partidas e o rei quer agradecer ao sábio por esta diversão tão boa. O sábio pede sementes ao rei de acordo com uma lei matemática.

Material relacionado

Vídeos: *E agora José?*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Este vídeo mostra um exemplo interessante de uma progressão geométrica através de uma lenda, contada em muitos livros, sobre a origem do jogo de xadrez. Além de contar uma nova versão dessa lenda, o vídeo trata de progressões geométricas e mostra como obter a soma de seus termos.



Consideramos este vídeo adequado para ilustrar uma situação em que aparece uma progressão geométrica e para introduzir a soma dos seus termos.

Antes da execução

Pode ser interessante recapitular as definições e propriedades básicas de uma sequência antes de usar este vídeo.

Definição de sequência:

Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos naturais (\mathbb{N}). Vamos considerar somente sequências cujo conjunto imagem seja o dos números reais (\mathbb{R}). Dizemos brevemente que sequências são funções de \mathbb{N} em \mathbb{R} . A notação usual de uma sequência é: (x_n) , para n natural. Isto significa que a sequência (x_n) dada é a função $1 \rightarrow x_1, 2 \rightarrow x_2, \dots, n \rightarrow x_n$, o que faz corresponder a cada número natural n o número real x_n .

O número x_n é chamado de n -ésimo termo da sequência.

Exemplos:

1) Uma sequência (x_n) é uma progressão aritmética quando $x_{n+1} = x_n + r$, onde r é uma constante, chamada de razão da progressão.

2) Uma progressão geométrica é uma sequência (x_n) onde cada termo, a partir do segundo, é o produto $x_{n+1} = r \cdot x_n$ do anterior por uma constante r , chamada de razão da progressão. Tem-se, portanto:

$$x_2 = r \cdot x_1, \dots, x_{n+1} = r^n \cdot x_1.$$

Podemos mostrar que

$$(1-r)(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}) = (1-r^n),$$

para r diferente de 1. Daí segue que:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = x_1(1 + r + \dots + r^{n-1}) = (x_1 - x_{n+1}) / (1-r).$$

É tradicional chamar uma progressão geométrica de P.G., e esta é a sequência que aparece no vídeo.

Outro exemplo deste tipo de sequência são os juros compostos, que são abordados no áudio “O que é exponencial?”, disponível no portal m3.mat.br.

Durante a execução

Observe aos alunos que no vídeo a P.G. que aparece é da forma (2^{n-1}) , onde n varia no conjunto: $\{1,2,3,\dots,64\}$, pois tem 64 quadradinhos no tabuleiro do jogo do xadrez.

Observação: quando são mostradas as quantidades de grãos nas primeiras casas do tabuleiro, não seria necessário indicar o 1 multiplicando cada uma das potências de 2.

Depois da execução

Sugestões de atividades:

1) Modelar o problema dos juros compostos, ou seja, aplicando um capital C no banco, com juros de 0,5% ao mês, quanto de dinheiro você terá depois de 10 meses?

Solução: Chamando de i a taxa de juro mensal (que no caso é $0,5\% = 0,005$), temos o seguinte: no mês 0, temos o capital C , no mês 1, o capital, $C(1+i)$, no mês 2, $C(1+i)^2$, no mês 3, $C(1+i)^3$, etc, e no mês n , o capital de $C(1+i)^n$, tendo então uma P.G. de razão $(1+i)$, com

primeiro elemento C . Assim usando a fórmula da soma de elementos de uma P.G. e uma calculadora você encontrará a resposta.

2) Aproveitar o momento e ensinar sobre PG infinita ou série geométrica, que pode ser definida da seguinte maneira:

Dada uma P.G. infinita de razão r , e primeiro elemento a_0 , sua soma será dada pelo $\lim ((a_0 + a_0 r^n)/(1-r))$, quando n tende a infinito, que só vai existir, e valerá $a_0/(1-r)$, quando $-1 > r > 1$.

Exemplo: mostre que $0,9\bar{9} = 1$, escrevendo a dízima periódica como uma soma de uma P.G. infinita com primeiro elemento $9/10$ e razão $1/10$.

3) Estender a P.G. à uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , obtendo as funções exponenciais. Professor, esta extensão é importante, pois o aluno poderá ver as ligações entre as progressões geométricas e as funções exponenciais.

No caso do vídeo a função estendida será $f(x) = 2^{x-1}$, para x real.

No caso dos juros compostos será $f(x) = C(1+i)^x$.

Por fim, salientamos que o procedimento mostrado para calcular o total de grãos pedidos pelo sábio pode ser generalizado para obtenção da fórmula que dá a soma dos n primeiros termos de uma P.G. em função do termo inicial e da razão. Essa demonstração pode ser encontrada em livros didáticos e a situação mostrada no vídeo deve servir como porta para fazer essa generalização.

Sugestões de leitura

Elon L. Lima, Paulo C. P. Carvalho, E.Wagner e A.C. Morgado – A Matemática do Ensino Médio, volume 1, Coleção do Professor de Matemática, SBM– 1999.

A.C.Morgado, E.Wagner, S.C.Zani, Progressões e Matemática Financeira, SBM, 2001.

Ficha técnica

Autora *Otília W. Paques*

Revisão *Samuel Rocha de Oliveira*

Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*

Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas

Reitor *Fernando Ferreira Costa*

Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*

Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diretor *Jayme Vaz Jr.*

Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*