Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Pandemia

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Mostrar uma ficção sobre epidemia com o crescimento e a função exponencial;
2. Trabalhar as propriedades da exponencial e sua inversa, o logaritmo;

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Pandemia

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Probabilidade; Probabilidade Condicional.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Mostrar uma ficção sobre epidemia com o crescimento e a função exponencial;
2. Trabalhar as propriedades da exponencial e sua inversa, o logaritmo.

Sinopse
Diante da possibilidade de uma pandemia de uma doença viral, dois pesquisadores, um brasileiro e outro alemão, discutem a velocidade de propagação da doença em seus respectivos países para descobrir quanto tempo têm para encontar uma vacina. Para modelar matematicamente o problema, usam as funções logaritmo e exponencial.

Material relacionado
Vídeos: *Osso duro de roer*, *Juros divididos - dívida crescente*; Áudios: *O que é exponencial*.

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Surgem no Brasil e na Alemanha, casos de uma doença viral até então desconhecida, e os pesquisadores responsáveis por desenvolver uma vacina devem, antes de qualquer coisa descobrir quanto tempo terão para realizar a tarefa.

Para tanto trabalham com um modelo exponencial de propagação cuja fórmula é

$$C=C_0 \times B^t,$$

onde C é o número de pessoas contaminadas, C_0 é o número de pessoas contaminadas inicialmente, t é o tempo em semanas decorrido desde o primeiro caso e B é o número de pessoas que cada doente contamina por semana.

Sabe-se desde o começo que o número inicial de doentes é de 10 pessoas no Brasil e 10 pessoas na Alemanha, ou seja em ambos os casos $C_0=10$. Porém pesquisas mostram que no Brasil a taxa de contaminação B é igual a 4 enquanto que na Alemanha a taxa é 2. Ou seja, para o Brasil vale,

$$C_{Brasil}=10\times 4^t,$$

e na Alemanha temos,

$$C_{Alemanha}=10\times 2^t.$$

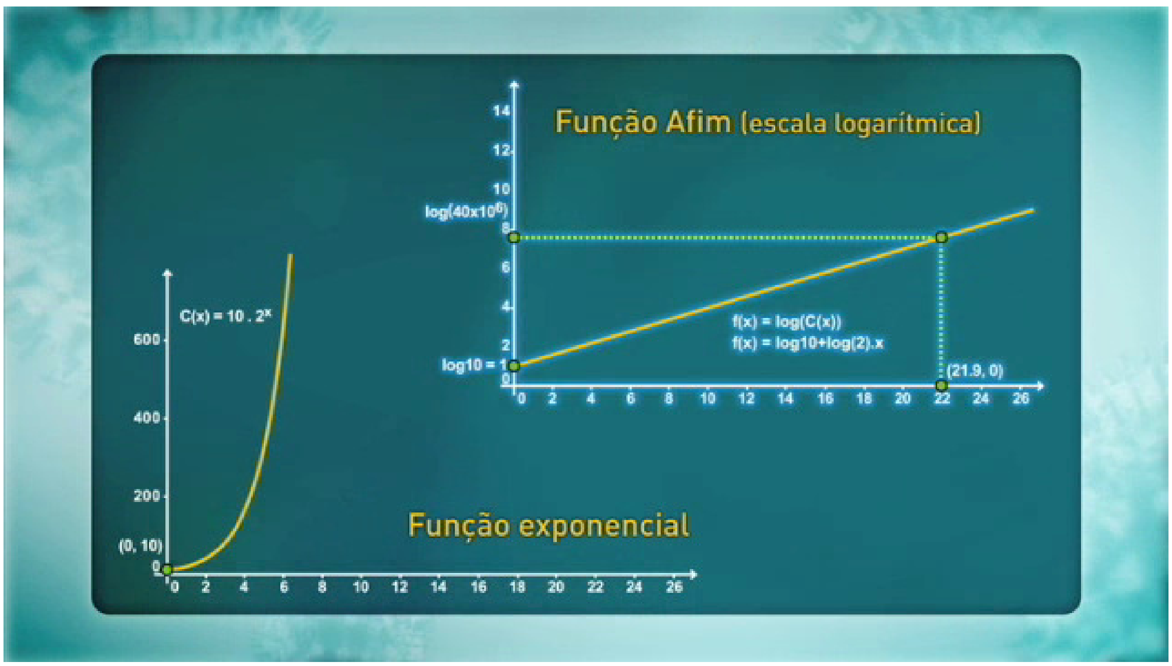
Esta diferença nas velocidades de propagação do vírus é atribuida às diferenças climáticas entre os dois paises.

Então os pesquisadores fazem as contas para descobrir quanto tempo terão em cada caso. Vejamos no caso do Brasil.

Devemos calcular o tempo T em semanas até que metade da população Brasileira, que é de aproximadamente 170 milhões de pessoas, seja contaminada. Então de acordo com nosso modelo temos,

$$85\times 10^{6}=10\times 4^{T},$$

$$\Rightarrow\ 85\times 10^{5}=4^{T}.$$



Para encontrar, então, o valor de T devemos aplicar dos dois lados da igualdade acima a função inversa da exponencial de base 4, que é o logaritmo de base 4, ficamos então com,

$$T= \log_4 10^5 + \log_4 85$$

$$\Rightarrow\ T=5\times \log_4 10 + \log_4 85.$$

Ora, $\log_4 85$ é aproximadamente 3,2 e $5\times \log_4 10$ é (usar a calculadora) aproximadamente 8,3, donde $T\approx 11{,}5$ semanas. Esta informação alarma os pesquisadores, mas felizmente o aparecimento de um paciente resistente ao vírus viabilizou a produção da vacina dentro do prazo.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Para que os alunos compreendam o vídeo os estudantes devem estar familiarizados com as funções exponenciais e logaritmo.

Depois da execução

A ciência que estuda modelos de propagação de doenças é a epidemiologia, e apesar da sua simplicidade, modelos similares ao mostrado no vídeo são de fato usados para prever o comportamento de certas doenças em populações. As funções logaritmo e exponencial são de grande importância prática, pois se manifestam desde fenômenos naturais como o decaimento radioativo, até modelos econômicos de juros. Recomendamos nestes tópicos os vídeos *Juros divididos, dívida crescente* e *Osso duro de roer* desta coleção. Propomos abaixo um problema "ecológico" envolvendo exponenciais e logaritmos.

Sustentabilidade no mundo dos camarões.
Carlos fez em um aquário um pequeno mundo habitado por camarões. O aquario era isolado do mundo exterior de onde recebia apenas a luz solar. No aquário junto com os camarões, Carlos colocou certa espécie de algas, as quais converteriam os excrementos e gás carbônico produzidos pelos camarões e a luz solar em mais alimentos e oxigênio para os camarões. Carlos sabia que para cada camarão no aquário deveriam existir duas algas (pelo menos) para manter o sistema em equilíbrio. Infelizmente para os camarões, Carlos não conhecia exponencial e logaritmo. Sabendo que uma população desta espécie

de camarões triplica a cada semana, enquanto as algas apenas duplicam neste período e que inicialmente existiam 10 camarões e 30 algas no aquário, calcule em quanto tempo o ecossistema de Carlos entra em desequilíbrio.

Solução.
A população C de camarões na t-ésima semana é de

$$C=10\times 3^t.$$

Já a população de algas é de

$$A=30\times 2^t.$$

Queremos saber quando a população de algas é o dobro da de camarões (A=2C), pois a partir daí, como os camarões se reproduzem mais rápido, teremos o desequilíbrio. Ou seja, queremos T, tal que

$$10\times 3^T=C=2A=2\times 30\times 2^T=30\times 2^{T+1}$$

Como no vídeo, para resolvermos este problema devemos recorrer ao logaritmo. Desta vez temos duas bases possíves para o logaritmo, 2 ou 3. Tomaremos logaritmo na base 2 (a escolha da base é indiferente). Ficamos com,

$$\cancel{\log_2 10} + T\times\log_2 3= \log_2 3+ \cancel{\log_2 10} +T+1$$

$$\Rightarrow\ (\log_2 3-1)T= \log_2 3+1.$$

Note que o logaritmo transformou o nosso problema exponencial em um problema linear trivial. Temos, então,

$$T\approx 4{,}4 \text{ semanas.}$$

Sugestões de leitura

G. Iezzi (2004). Fundamentos de Matemática Elementar vol. 1 e 2.

Ficha técnica

Autor Alison Melo
Revisão *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*