



Guia do Professor

Vídeo

Oferenda Musical de Bach

Série Matemática na Escola

Objetivos

1. Apresentar isometrias no plano por meio de uma música chamada *Oferenda Musical de Bach*;
2. Discutir isometria na música, isometria nas artes, isometria na computação gráfica e isometria na natureza.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 

Oferenda Musical de Bach

Série

Matemática na Escola

Conteúdo

Geometria, isometrias no plano.

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivos

1. Estudar as isometrias no plano;
2. Discutir isometria na música, isometria nas artes, isometria na computação gráfica e isometria na natureza.

Sinopse

Num estúdio de filmagem, a jovem Lúcia está tocando uma música em um cravo: Oferenda Musical, de Bach. Ela e o diretor João conversam sobre detalhes da gravação quando as folhas da partitura caem e se espalham no chão. Ao pegar as folhas do chão, ela percebe que as notas do começo ao fim são as mesmas do fim para o começo de uma folha. Ela conversa com João que explica a ela como Bach usou no seu universo as simetrias.

Material relacionado

Experimentos: *Espelhos e simetrias*;

Vídeos: *Naturalmente*.

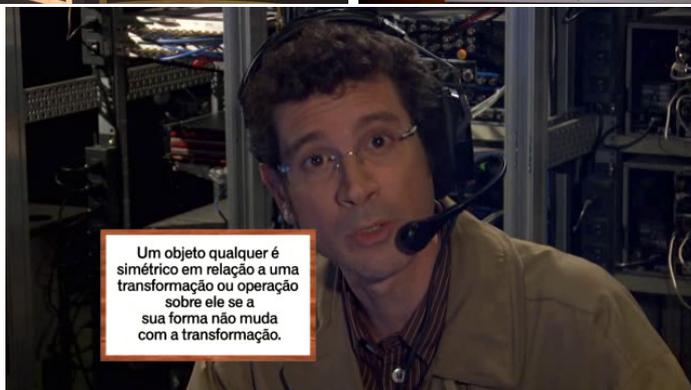
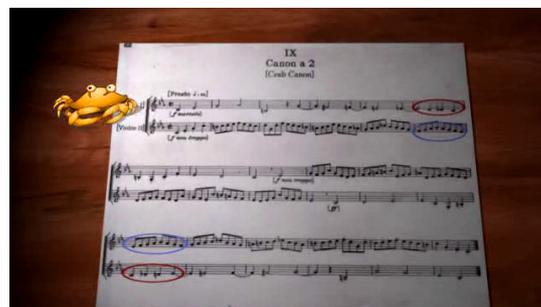
Introdução

Sobre a série

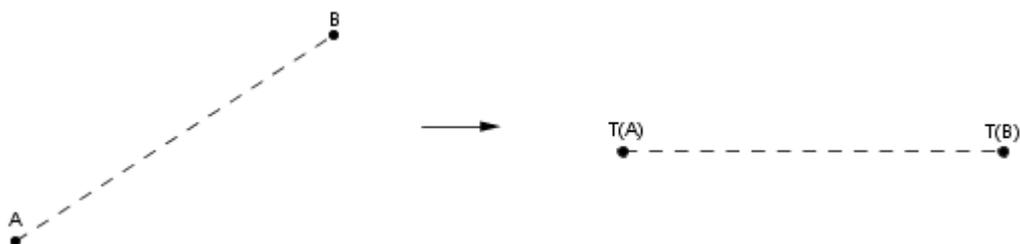
A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa aborda as simetrias no plano por meio de uma música chamada Oferenda Musical, de Bach, de uma maneira muito interessante e diferente. Outras músicas também são construídas por João, usando as simetrias no plano. Uma maneira muito divertida e interessante.



Na Matemática, as isometrias no plano são transformações no plano α , que são bijetoras, ou seja, injetoras e sobrejetoras, e que preservam distâncias, ou seja, se $T: \alpha \rightarrow \alpha$ é uma isometria, então para quaisquer pontos P e Q de α , temos distância de $T(P)$ a $T(Q)$ = distância de P a Q .



As isometrias ou movimentos rígidos nos são bastante familiares. Coloque uma folha de papel num lado de uma mesa e desloque-a até o outro lado. Se você não amassou ou cortou a folha, neste movimento o tamanho e a forma da folha de papel não sofreram nenhum tipo de alteração. Temos então que a sua posição final foi obtida por alguma isometria.

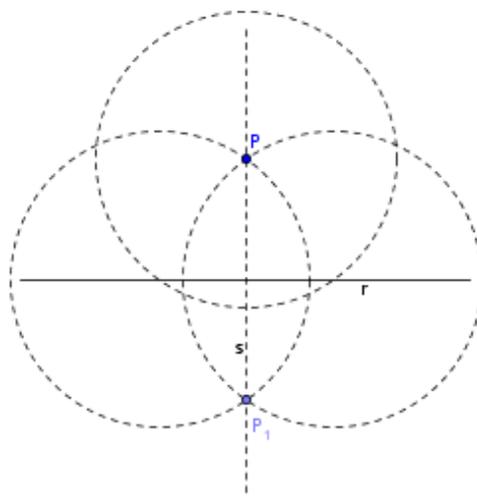
Dizemos que duas figuras F e G no plano euclidiano α são simétricas, se existir uma isometria $T: \alpha \rightarrow \alpha$, tal que G é a imagem de F por esta isometria ($G = \text{Im}(F)$).

Isometrias

As isometrias no plano (como mostra o vídeo) são as seguintes:

1) Reflexões em retas.

Dada uma reta r , como abaixo, a isometria T que leva cada ponto P do plano em seu simétrico P_1 em relação à reta r é chamada reflexão na reta r . A reta r é chamada de eixo de reflexão de T . Esta isometria também é chamada de espelhamento, sendo a reta r o espelho.



Existem figuras U que podem ser vistas como a união de F com $\text{Im}(F)$,

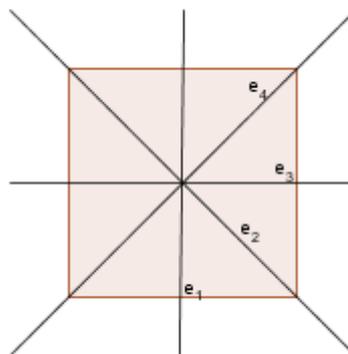
$U = F \cup \text{Im}(F)$, pela reflexão numa reta r que intersecciona essa figura. Dizemos que U é uma figura simétrica em relação a esta reta r .

A reta r é chamada de eixo de simetria de U .

Dizemos que há uma simetria axial quando existem eixos de simetria.

Exemplos

No vídeo aparece um quadrado com um eixo de simetria. Na realidade, o quadrado é simétrico em relação a 4 eixos de simetria: as retas suportes de suas diagonais e as mediatrizes dos seus lados.



Uma circunferência é simétrica em relação à reta suporte de qualquer um de seus diâmetros.

Um triângulo isósceles é simétrico em relação à mediatriz da sua base.

2) Translação.

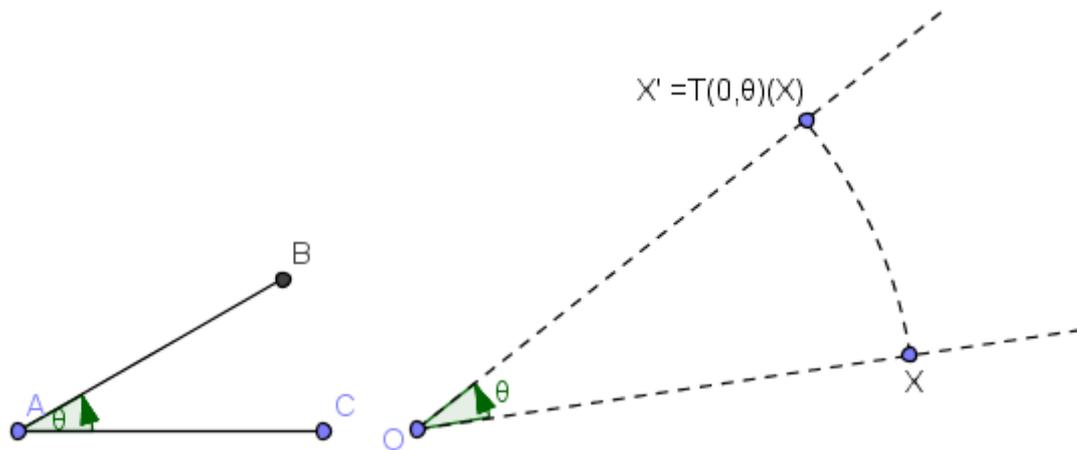
Seja (a,b) um vetor dado em α . $T:\alpha\rightarrow\alpha$ é uma translação segundo o vetor (a,b) , se $T(P) = T(x,y) = (x+a,y+b)$, se (x,y) forem as coordenadas cartesianas de P e (a,b) forem as coordenadas do vetor dado.

Se $(a,b) = (1,0)$, temos uma translação horizontal, na direção do eixo x positivo. Observe que no vídeo João apresenta uma partitura com translação horizontal.

3) Rotação.

Na rotação necessitamos de um ponto O fixo e um ângulo θ orientado (positivamente no sentido anti-horário e negativo no sentido horário).

A rotação de centro O e ângulo θ é a isometria $T(O,\theta) : \alpha \rightarrow \alpha$, tal que deixa O fixo e leva $P \neq O$, no ponto X' como abaixo.



Em particular , quando $\theta = 180$, a rotação $T(O,180)$ é chamada de meio-giro ou de reflexão em relação ao ponto O .

Dizemos que uma figura tem simetria de rotação de um ângulo θ , ou tem simetria θ -rotacional, quando coincide com sua imagem pela rotação do ângulo θ ao redor do seu centro.

Exemplos: o quadrado tem simetria 90-rotacional e também 180-rotacional; o triângulo equilátero possui simetria 120-rotacional.

Isometria nas artes

Como mostra o vídeo, M. C. Escher, artista holandês (1898-1972) e também matemático, utilizou em seus trabalhos simetrias de rotação, de reflexão e de translação.

O professor pode pesquisar com os seus alunos os termos “simetria” e “Escher” para enriquecer o conteúdo.

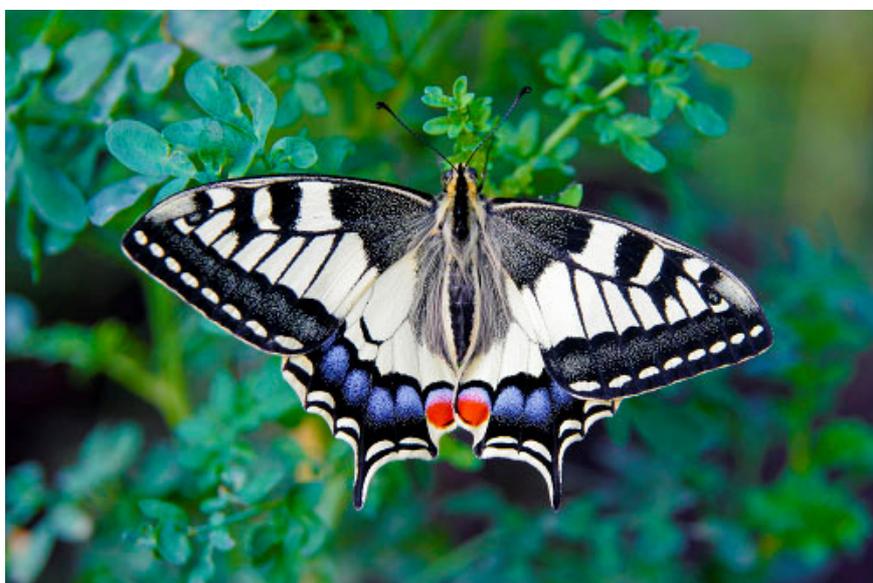
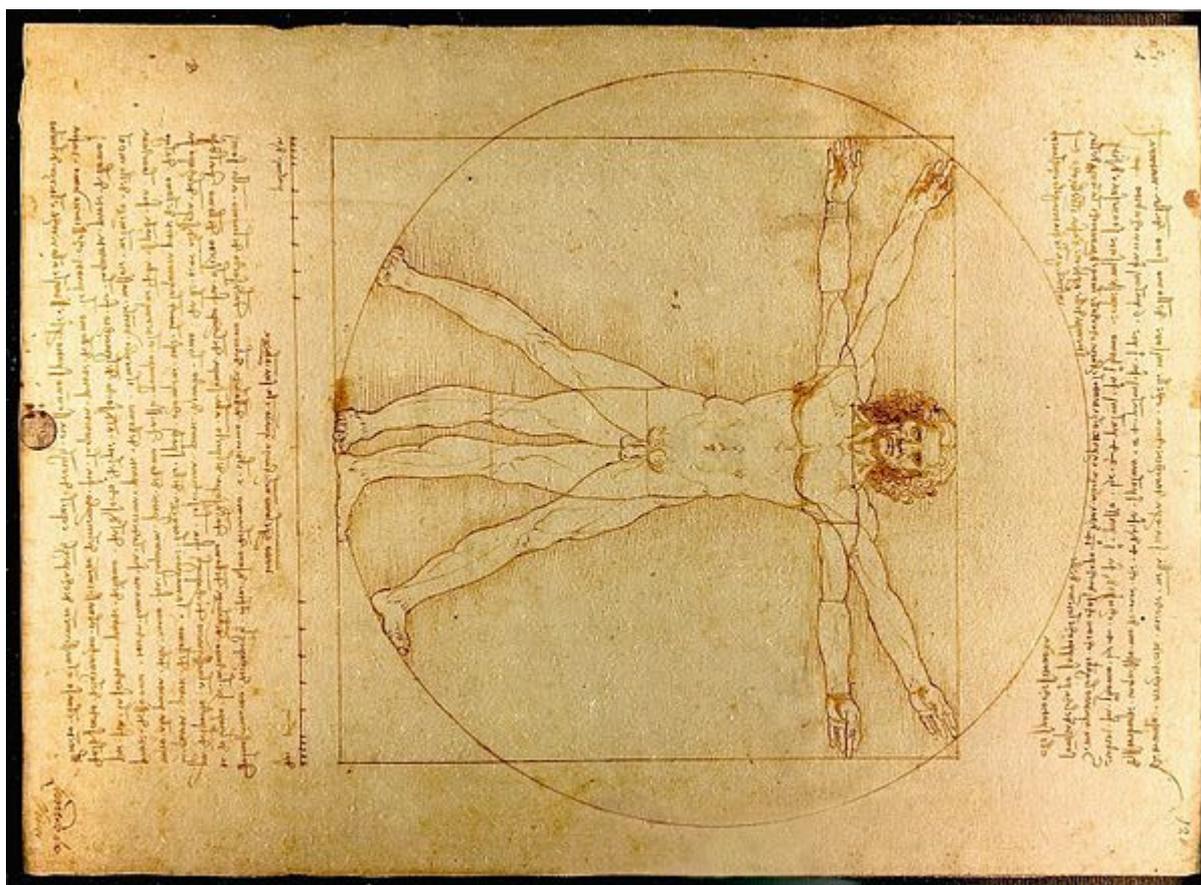
Isometria na música

Bach usou simetrias nas suas obras, como mostra o vídeo.

Isometria nas animações gráficas

Uma animação feita num computador, como os desenhos animados de antigamente, consiste em vários quadros que são apresentados numa sequência muito rápida, nos dando a ilusão de movimento. Para fazer isso, o computador precisa conhecer as transformações no plano. Para mover as figuras sem deformá-las, ele vai usar as isometrias.

Veja alguns exemplos de isometria (aproximada) no corpo humano, na coruja e na borboleta:



Sugestões de atividades

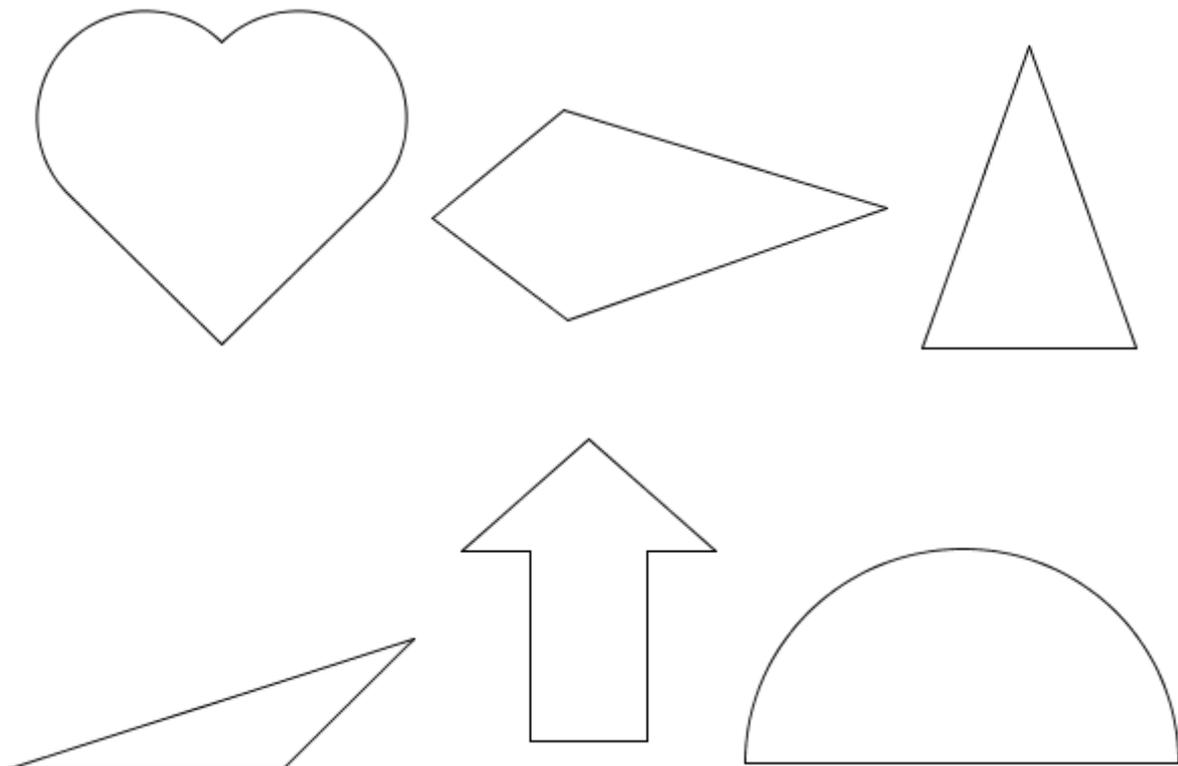
Depois da execução

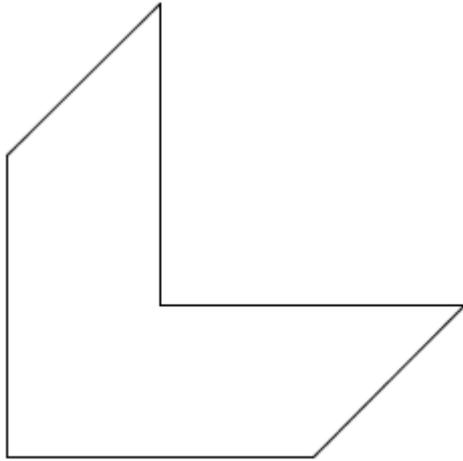
Professor sugira a seus alunos, se precisar, a usarem papel transparente para as seguintes atividades:

1) Trace os eixos de simetria de cada letra abaixo, se houver:

B E F H J L M N P S

2) Trace os eixos de simetria de cada figura, se houver.





3) Observe a carta do baralho “dama” abaixo. Verifique que uma das figuras da dama pode ser obtida através de uma rotação da outra. Marque o centro O de rotação e determine o ângulo de rotação.



4) O pentágono e o triângulo regulares possuem simetria θ -rotacional. Encontre θ em cada caso.

Dizemos que um polígono regular de n lados possui simetria

$\theta = \frac{(360k)}{n}$ rotacional, se k for inteiro positivo, $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, se n for par e $k = 0, \dots, \frac{(n-1)}{2}$, para n ímpar.

Referências Bibliográficas e Sugestões de leitura

E.Q F.Rezende, M.L.B.Queiroz, **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas**- Editora Unicamp, Campinas, 2000.
M.Leite Lopes e L.Nasser, (coordenadores)- **Geometria : na era da imagem e do movimento**, editora URFJ, Rio de Janeiro.1996.
E. Lages Lima, **Isometrias**, Rio de Janeiro, SBM, 1996.
Ledergreber-Ruoff, **Isometrias e Ornamentos no Plano Euclidiano**, São paulo, Atual Editora, 1982.

Ficha técnica

Autor do Guia: Otilia Terezinha W. Paques
Revisão do Guia: *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas

Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diretor *Caio José Colletti Negreiros*
Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*