Números
e funções

Guia do Professor

Vídeo

O sonho continua.

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar o número complexo.
2. Mostrar a fórmula trigonométrica de Euler.
3. Mostrar os principais conjuntos numéricos.

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância | Ministério da Ciência e Tecnologia | Ministério da Educação | Governo Federal

O sonho continua

Serie
Matemática na Escola

Conteúdos
História dos números complexos, suas formas e propriedades algébricas, trigonométricas e geométricas. Fórmula de Euler. Conjuntos numéricos.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar o número complexo.
2. Mostrar a fórmula trigonométrica de Euler.
3. Mostrar os principais conjuntos numéricos.

Sinopse.
Este é o terceiro video da série sobre os números complexos. Hans, o jovem estudante sonha novamente com Morfeu, que lhe conta sobre a fórmula de Euler e sobre os conjuntos numéricos.

Material relacionado
Áudios: *Complexos;*
Experimentos: *Transformação de Mobius*;
Vídeos: *Um sonho complexo, O sonho não acabou.*
Software: *Movimentos complexos*.

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Este vídeo faz parte de uma trilogia sobre números complexos. Este é o terceiro. Os outros são: *O sonho não acabou* e *Um sonho complexo*. Os vídeos mostram uma maneira divertida e curiosa de olhar para os números complexos. O primeiro usa a dualidade do personagem do livro *Médico e o Monstro*. O segundo e o terceiro usam Morfeu, o deus dos sonhos. Todos eles tratam da história dos números complexos e de algumas de suas propriedades. Faremos aqui um resumo da história que vai aparecer nos três guias correspondentes aos programas.

Um pouco de história dos números complexos.
Durante muitos séculos de estudo de equações algébricas os matemáticos pensavam nelas como meios de resolver problemas concretos. Um bom exemplo disto, pode ser encontrado no livro “Ars Magna” (A Grande Arte) de Giarolamo Cardano (1501–1576) publicado em 1545. Ele discute o problema de encontrar dois números x e y cuja soma é 10, $x+y=10$ e cujo produto é 40, $xy=40$. Este problema gera uma equação quadrática $x^2-10x+40=0$, cujas raízes são $5-\sqrt{-15}, 5+\sqrt{-15}$. Ele observa que estes números não existem. Em outro livro, diz que “$\sqrt{9}$ é 3 ou –3, mas $\sqrt{-9}$ não é nem 3, nem –3 e sim alguma terceira espécie de coisa misteriosa.”

O maior triunfo de Cardano foi dar uma fórmula para resolver uma equação cúbica, da forma $x^3+px+q=0$. (usada ainda hoje como Fórmula de Cardano). A sua fórmula dava soluções para muitas equações cúbicas, mas em certos casos havia uma aberração, pois apareciam raízes quadradas de números negativos.

O passo que faltava para o entendimento dessas coisas misteriosas foi fornecido por Rafael Bombelli (1526–1572), discípulo de Cardano. No seu livro “Algebra”, Bombelli ampliou as idéias de Cardano em diversas direções. Ele argumentou que era possível operar com essa “nova espécie de radical” apesar de não pensar neles como números. Simplesmente usava as operações aritméticas com eles. Esse foi o primeiro sinal de que os números complexos poderiam na realidade serem ferramentas úteis.

Mas o preconceito e a resistência entre os ilustres da matemática continuaram. Meio século mais tarde, Albert Girard e Renée Descartes parecem ter sabido que uma equação algébrica de grau *n* terá *n* raizes, desde que se permitam raízes “verdadeiras” (reais positivas), raizes “falsas” (reais negativos) e raízes “imaginárias” (complexas). Isso ajudou a tornar a teoria geral das equações algébricas mais simples e arrumada.

O próximo passo foi de Abraham De Moivre no inicio do século XVIII. Está implícito no trabalho de De Moivre a seguinte fórmula:

$(\cos(x)+isen(x))^n=\cos(nx)+isen(nx)$, para n inteiro.

Alguns anos mais tarde, Leonhard Euler, usando cálculo descobriu que

$e^{ix} = \cos(x) + isen(x)$, (quando x é medido em radianos).

Para $x = \pi$, esta expressão se torna $e^{i\pi} = -1$, que relaciona alguns dos mais importantes números da Matemática: os números irracionais *e* e π, o número imaginário *i* e o número 1 com o sinal negativo.

Em meados do século XVIII sabia-se que os números complexos tinham uma ligação profunda com as funções trigonométricas e exponenciais. Mas persistiam alguns problemas. Para Euler, a $\sqrt{-2}$ ainda era um problema.

Carl F. Gauss (1787-1855) foi um dos mais impressionantes homens nos séculos XVIII e XIX. Em sua tese de doutorado, na Universidade de Helmstadt, escrita aos vinte anos de idade, deu a primeira demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, que uma equação polinomial, com coeficientes complexos, e de grau $n>0$, tem pelo menos uma raiz complexa. Euler, D'Alembert e Lagrange haviam feitos tentativas frustradas desta prova. A ideia por trás da demonstração de Gauss é a substituição de z por $x+iy$, na equação polinomial geral $f(z)=0$.

Foi Gauss quem propôs o termo "números complexos".

No século XIX, as coisas começaram a ser colocadas em ordem. O matemático francês J. R. Argand foi o primeiro a sugerir em 1806 que se poderia representar geometricamente os complexos em um plano. Gauss propôs a mesma idéia em 1831 e este plano no qual os complexos são representados é chamado de plano de Argand-Gauss.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Professor. Antes da execução você pode apresentar a história dos números complexos como a resumida acima ou pelo áudio *Complexos* da coleção M³ Matemática Multimídia.

Durante a execução

Professor, para este vídeo, apresente as formas algébrica, trigonométrica e as operações de adição e multiplicação dos números complexos.

Forma algébrica.
Um número complexo é um número da forma $x+iy$, com x e y reais e $i=\sqrt{-1}$. Fixado um sistema de coordenadas no plano, o complexo

$z=x+iy$ é representado pelo ponto $P(x,y)$. O plano no qual representamos os complexos é chamado de Argand-Gauss.

Os números representados no eixo x são da forma $(x,0)=x+i0=x$, isto é, são os números reais.

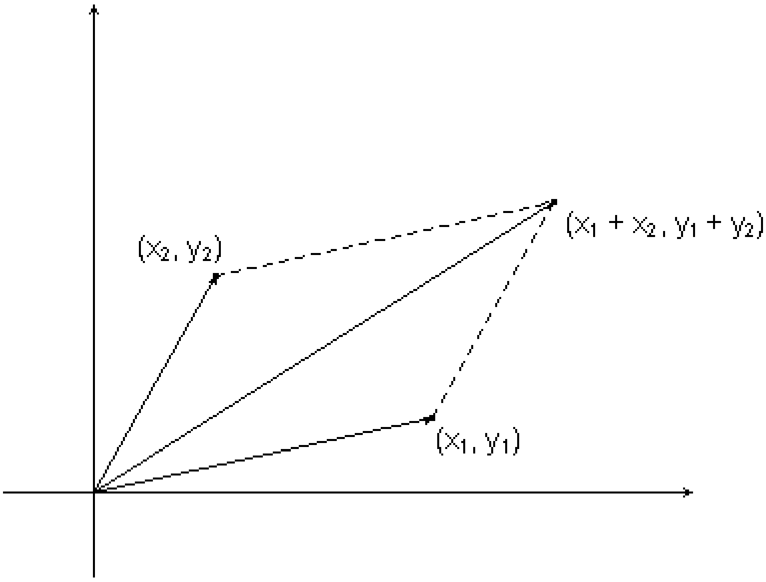
Os complexos representados no eixo y são da forma $(0,y)=0+iy=y$, são os chamados imaginários puros.

Dado $z=x+iy$, x é chamada parte real e y parte imaginária de z.

Dados dois complexos $z=x_1+iy_1$ e $w=x_2+iy_2$, a soma $z+w$ é definida por

$$z+w=(x_1+x_2)+i(y_1+iy_2).$$

Para representar a soma $z+w$, no plano veja a figura que segue.



Forma trigonométrica.
Dado um complexo $z = x + iy$ no plano, denotamos por $r = \mathrm{mod}\, OP = \sqrt{x^2 + y^2}$.

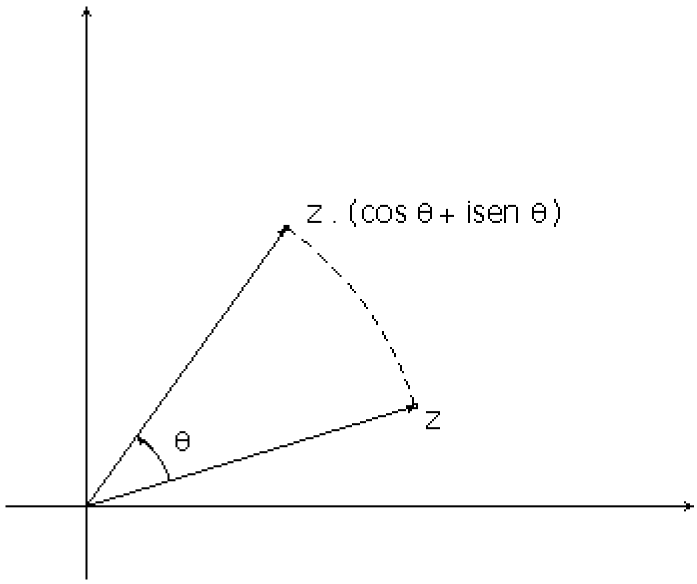
Um argumento de um complexo, z não nulo, é por definição, qualquer um dos ângulos $\theta = \arg(z)$ que o vetor OP forma com o semieixo positivo dos x. É claro que todo complexo, tem infinitos argumentos. Aquele que está no intervalo $(-\pi, \pi)$ é chamado de argumento principal e é denotado por $Arg(z)$.

Os números r e θ são as coordenadas polares de z. A forma polar é $z = r(\cos\theta + isen\theta)$.

Dados z e w como acima, o produto $zw = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$, que é muito mais fácil de operar na forma polar:

$$z = r_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1),\ w = r_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2),\ zw = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)).$$

Podemos então verificar geometricamente que o produto de dois vetores *z* e *w* é o seguinte, no caso em que $\mathrm{mod}(w) = 1$ e $\theta_2 = \theta$:



Neste video aparece a formula de Euler $e^{ix} = \cos(x) + isen(x)$. E mais os conjuntos numéricos que tem elementos que resolvem alguma equação:

1. a equação $x+1=0$, tem solução em $\mathbb{Z}$ conjunto dos inteiros;
2. a equação $2x=3$, tem solução em $\mathbb{Q}$ dos racionais;
3. a equação $x^2=2$, tem solução no conjunto dos irracionais;
4. a equação $x^2+1=0$, tem solução em $\mathbb{C}$ dos complexos.

Depois da execução

Professor. Sugira aos alunos os seguintes problemas:

1) Resolva a equação : $z^2 \ -2z + 2 = 0$;

2) Determine o lugar geométrico dos complexos *z* em cada caso:

a) $|z|=1$,b) $|z+i|\leq 1$,c) $|z+i|=|1-z|$,d) $|1+z|+|1-z|=2$

e) $\frac{z-1}{z+1}$ é imaginário puro.

Sugestões de leitura

Elon Lages Lima, Paulo Cesar P. Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto C. Morgado – **A Matemática do ensino médio** – volume 3 SBM.
William P. Berlongoff e Fernando Q. Gouvea– **A Matemática através dos tempos**. Editora Blucher – 2004.
Howard Eves– **Introdução à História da Matemática** – Editora da Unicamp.

Ficha técnica

Autor *Otília W. Paques*
Revisão *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*