Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

O sonho

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar dois modelos matemáticos para o crescimento populacional humano, com a função exponencial e a função logística.
2. Analisar o crescimento populacional nas últimas décadas versus a taxa de crescimento populacional (em porcentagem) no Brasil.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

O sonho

Série
Matemática na Escola

Conteúdo
Função e gráficos.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar dois modelos de crescimento populacional: o de Verhulst e (função logistica) e o de Malthus (função exponencial).
2. Comparar o crescimento populacional no Brasil com a taxa de crescimento num gráfico, para fazer previsões.

Sinopse
A Dona Laura se lamenta com o aumento da população no Brasil aumentou. Muitas pessoas em todos os lugares! Ela liga a TV e um demógrafo lhe explica sobre o crescimento populacional no Brasil e a sua taxa de crescimento. Dona Laura, dorme em frente à TV e quando acorda tem a sensação de que esta conversa tinha sido um sonho.

Material relacionado
Áudios: ***O que é exponencial? Mais vivos ou mais mortos? População mundial, Estimativas e idades;***
Vídeos: ***A velha história das multidões, Colméia global;***
Softwares: ***Crescimento populacional.***

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa aborda dois modelos matemáticos simples, para o crescimento populacional. Um deles é de Verhulst e o outro é de Malthus. Uma função nova para os alunos vai aparecer no modelo de Verhulst , a função logistica.

O modelo de crescimento exponencial, de Malthus é adequado para descrever o crescimento de vários tipos de população, porém, obviamente uma população não pode crescer exponencialmente para sempre. O modelo de crescimento exponencial simples torna-se inaplicável quando o ambiente começa a inibir o crescimento populacional.

A curva logistica de crescimento (de Verhulst) é um modelo importante que leva em consideração alguns efeitos do ambiente na população. Para pequenos valores de t, a curva tem a mesma forma básica que uma curva exponencial. Quando a população começa a sofrer problemas com superpopulação ou falta de alimentos, a taxa de crescimento populacional começa a diminuir. Eventualmente, a taxa de crescimento decresce para zero, que é exatamente o que o vídeo mostra, à medida que a população atinge o tamanho máximo que o ambiente pode suportar.

No modelo de Malthus, a função *P(t)* que dá a população em função do tempo *t* é:

$P(t) = C \times e^{kt}$, onde *C* e *k* são duas constantes, e *C* é positiva.

Note que $k>0$ dá crescimento e de $k<0$, dá um decaimento.

O modelo de Verhulst, é dado pela função (chamada função logística, ou curva logística),

$P(t) = \dfrac{M}{1 + B \times e^{-Mkt}}$ onde *B*, *M* e *k* são constantes positivas.

Esta função tem um comportamento muito interessante, veja, por exemplo, o seu gráfico:

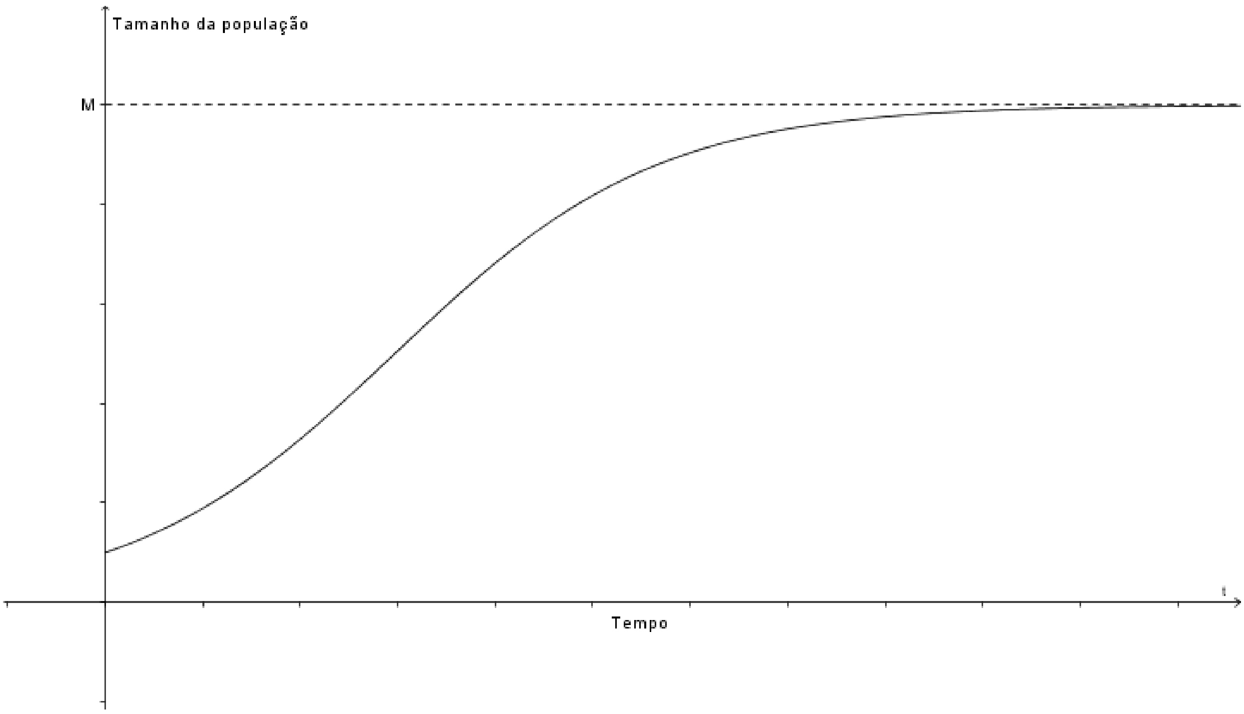
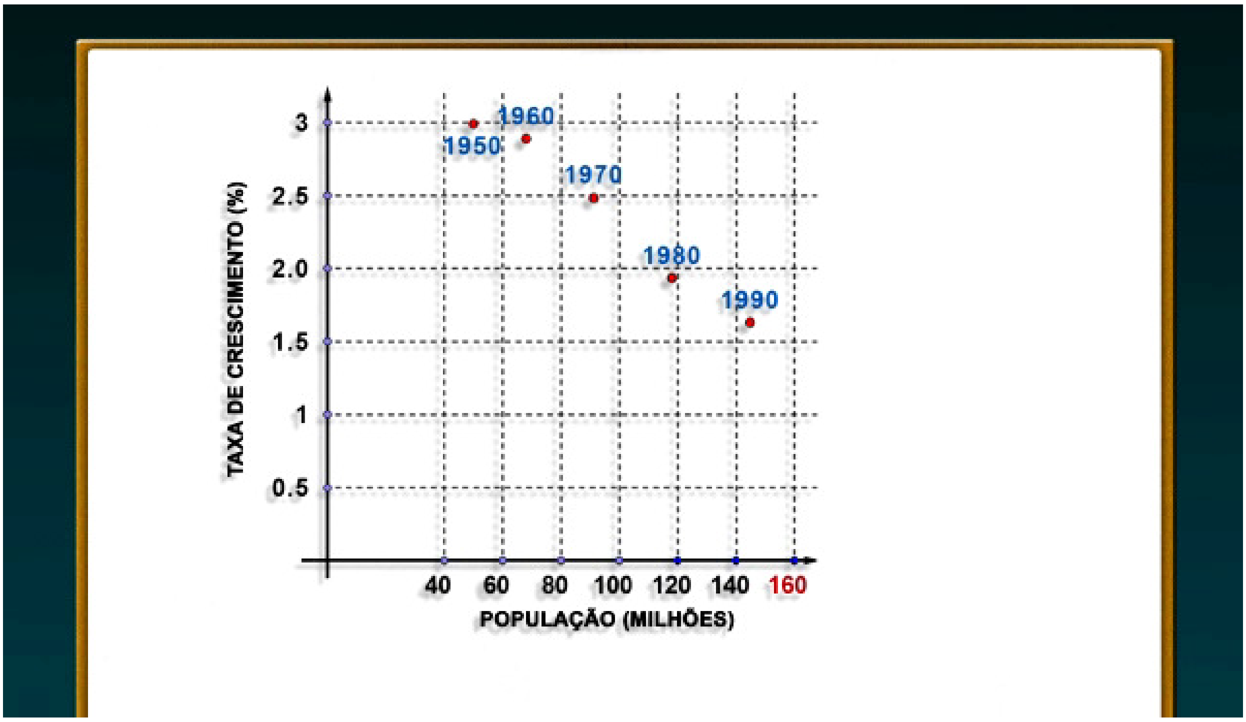


Figura 1: gráfico de uma função logística

Esta função é sempre crescente.

O gráfico tem a concavidade para cima a princípio e depois côncavo para baixo. No ponto de inflexão, que é onde muda a concavidade a inclinação é máxima. À esquerda desse ponto, o gráfico é côncavo para cima e a taxa de crescimento é crescente. À direita do ponto de inflexão o gráfico é côncavo para baixo e a taxa de crescimento vai decrescendo até zero. A população então atinge o seu ponto máximo de sustentabilidade, que é o M.

Para encontrar o instante t a partir do qual a taxa de crescimento é nula, o demógrafo na tela da TV, mostra um gráfico da taxa de crescimento versus a população do Brasil na décadas da tabela inicial. (segundo o IBGE). (o eixo horizontal marca a população e o vertical a taxa de crescimento).



Os pontos no gráfico podem ser aproximados por uma reta decrescente (gráfico de uma função afim), que quando expandida até o eixo horizontal, que é o eixo da população, dá o ponto de coordenadas (M,0), onde M é o valor máximo da população, e a taxa é zero.

Sugestões de atividades

Depois da execução

Sugestão de atividade para os alunos.
Suponha que 100 peixes são colocados num lago. Passados 3 meses, a população de peixes está em 250. Um estudo ecológico prevê que o lago pode suportar uma população de até 1000 peixes. Encontre a fórmula para o número de peixes P(t) no lago, t meses após os primeiros 100 peixes terem sido ali depositados.

Solução: Veja que o problema é o mesmo da população humana, a população limite é agora dada, 1000 e a função que modela este problema é a mesma . Então o trabalho está em encontrar as constantes *B* e *k*, em $P(t) = \frac{1000}{(1 + B \times e^{-1000kt})}$.

Em t = 0, tinha 100 peixes, assim, colocando esta informação na equação acima, obtemos 100 = P(0) = 1000/(1+B). Dai 1 +B = 10 e B=9. Desde que P(3) = 250, temos

$250 = \frac{1000}{(1 + 9 \times e^{-3000k})}$. Isolando a exponencial e aplicando a função **ln**, na equação obtemos:

$-3000k = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$, e *k* é aproximadamente 0,00037.

Referências Bibliográficas e Sugestões de leitura

[1] L.J.Goldstein,D.C.Lay,D.I.Schneider, Matemática Aplicada, Economia, Adminsitração e Contabilidade, Editora Bookman,oitava edição, 2002.

[2] D.Hughes-Hallet, A.M.Gleason, et al, Cálculo e aplicações, Editora Blucher,1999.

[3] R.Bassanezi, Jr Ferreira, Equações diferenciais com aplicações Ed. Harbra, 1988.

[4] P.A. Marinho, Pesquisas nas ciencias humanas. Ed. Vozes,1981.

[5] E. Batschelet, Introdução à Matemática para biocientistas. Editora Interciencia.

[6]www.ibge.gov.br.- site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatistica-IBGE.

Ficha técnica

Autor do Guia: *Otilia Terezinha W. Paques*
Revisão do Guia: *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*