Matemática Multimídia

Geometria e medidas

Guia do Professor

Vídeo

Naturalmente

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar algumas relações matemáticas presentes na natureza;
2. Motivar a descoberta de processos de otimização, que envolvem relações de geometria e trigonometria.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Naturalmente

Série
Matemática na Escola

Conteúdo
Matemática na Natureza: formas geométricas.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar algumas relações matemáticas presentes na natureza;
2. Motivar a descoberta de processos de otimização, que envolvem relações de geometria e de trigonometria.

Sinopse
A jovem Ana envia as fotos que tira em um trabalho de campo para Artur, que a auxilia a descobrir na natureza alguns exemplos de relações matemáticas que descrevem formas e processos de otimização.

Material relacionado
Experimentos: *Espelhos e Simetrias; Montanhas Geométricas; O Quadrado de Koch; Padrões no Plano.*
Vídeos*: O Código de Pascal.*
Softwares: *Trigonometria e Halos.*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa aborda diferentes relações matemáticas presentes na natureza. Enquanto realiza um trabalho de campo a personagem Ana envia as fotos que tira para Artur, que a auxilia no seu processo de descoberta de conceitos presentes nas formas geométricas que ela observa.

O formato aparentemente hexagonal dos favos das abelhas envolve duas questões matemáticas: o problema isoperimétrico e as possibilidades de ladrilhamento do plano.

A questão abordada inicialmente no programa é que entre os polígonos com o mesmo número de lados e mesmo perímetro, o polígono regular é o que tem maior área:

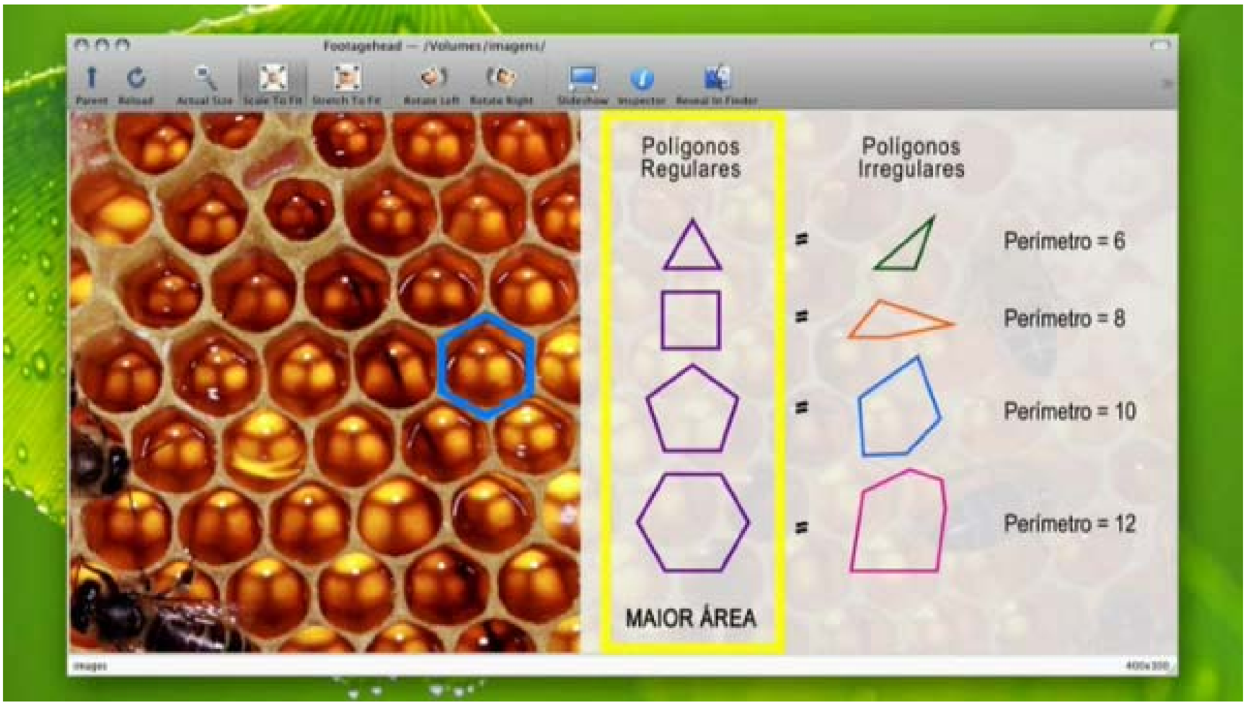


Figura 1: Ilustração do programa mostrando que polígonos regulares têm áreas maiores do que polígonos irregulares

Uma demonstração para este fato pode ser feita por indução sobre o número de lados [4]. A partir de um polígono qualquer, constrói-se inicialmente um polígono equilátero e depois um regular (com ângulos também iguais), mantendo o número de lados e aumentando a área a cada passo.

O problema equivalente a este também é apresentado: dentre dois polígonos regulares com o mesmo perímetro, aquele que possui maior área é justamente o que possui o maior número de lados.

Figura 2|: Ilustração do programa mostrando que polígonos regulares têm áreas crescente com o número de lados, mantendo o perímetro constante.

A verificação desta afirmação pode ser realizada deduzindo-se a expressão geral para o cálculo da área de um polígono regular de *n* lados:

$$A_n = \frac{p^2}{ntan\left(\frac{n}{\pi}\right)}$$

na qual p representa o semi-perímetro e *n* o número de lados da figura. A dedução da expressão acima é uma ótima oportunidade para explorar relações trigonométricas, como é sugerido nas atividades propostas ao final deste guia. Como a sequência de áreas (A_n) é crescente[1], temos que a área cresce em função do número de lados *n*.

[1] Uma forma de provar este fato é usando cálculo diferencial. Mostra-se inicialmente que a função tan(y)/y é crescente. Assim, para $y=\pi/n$, quanto maior o valor de *n*, menor é o valor da função que está no denominador da expressão de A_n.

Como é ressaltado no programa, *o polígono regular também é o de menor perímetro dentre os polígonos de n lados de mesma área*. Isto pode verificado partindo do resultado anterior e utilizando um fator de escala: dado um polígono qualquer de área A, n lados e perímetro $2p$, consideramos o polígono regular P de n lados com este perímetro, o qual terá uma área B maior do que ou igual a A. O polígono regular P' semelhante a P obtido por uma redução de escala de fator $k = 1/\sqrt{\frac{B}{A}}$ terá perímetro $2pk$ que é menor do que ou igual a $2p$ e área igual a $k^2B = A$.

Agora, entre dois polígonos regulares de mesma área, o polígono que tem o menor perímetro será justamente aquele que possui o maior número de lados. Verificamos este fato analisando novamente a fórmula para o cálculo da área de polígonos regulares, agora escrita como:

$$A_n n tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = p^2$$

Como a sequência $n tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ é estritamente decrescente, termos que quanto maior o valor de n, menor o valor de p^2 e consequentemente, menor o valor do perímetro.

No processo de armazenamento de mel, além de minimizar o contorno do favo, procura-se o melhor "empacotamento" ou ladrilhamento. Já conhecendo o resultado de que polígonos com maior número de lados minimizam o contorno para uma área fixa, procura-se a solução de outro problema*: qual é o polígono regular com maior número de lados que possibilita um ladrilhamento do plano?*

Esta questão pode ser abordada de forma direta, sabendo que para que um ladrilhamento ocorra é necessário que a fração $\frac{2\pi}{\theta}$, na qual θ é o ângulo interno do polígono, seja um número inteiro positivo. Obtemos um ângulo interno de um polígono regular utilizando $\theta = \frac{\pi(n-2)}{n}$. Substituindo na fração apresentada, teremos $\frac{2\pi}{\frac{\pi(n-2)}{n}}$ e simplificando obtemos $\frac{2n}{n-2}$, que pode ser escrito em sua forma equivalente por $\frac{2n-4+4}{n-2}$ que é igual a $2 + \frac{4}{n-2}$ que é um número inteiro e positivo apenas se n-2 for divisor de quatro. Assim temos que n=3, n =4 ou n =6.

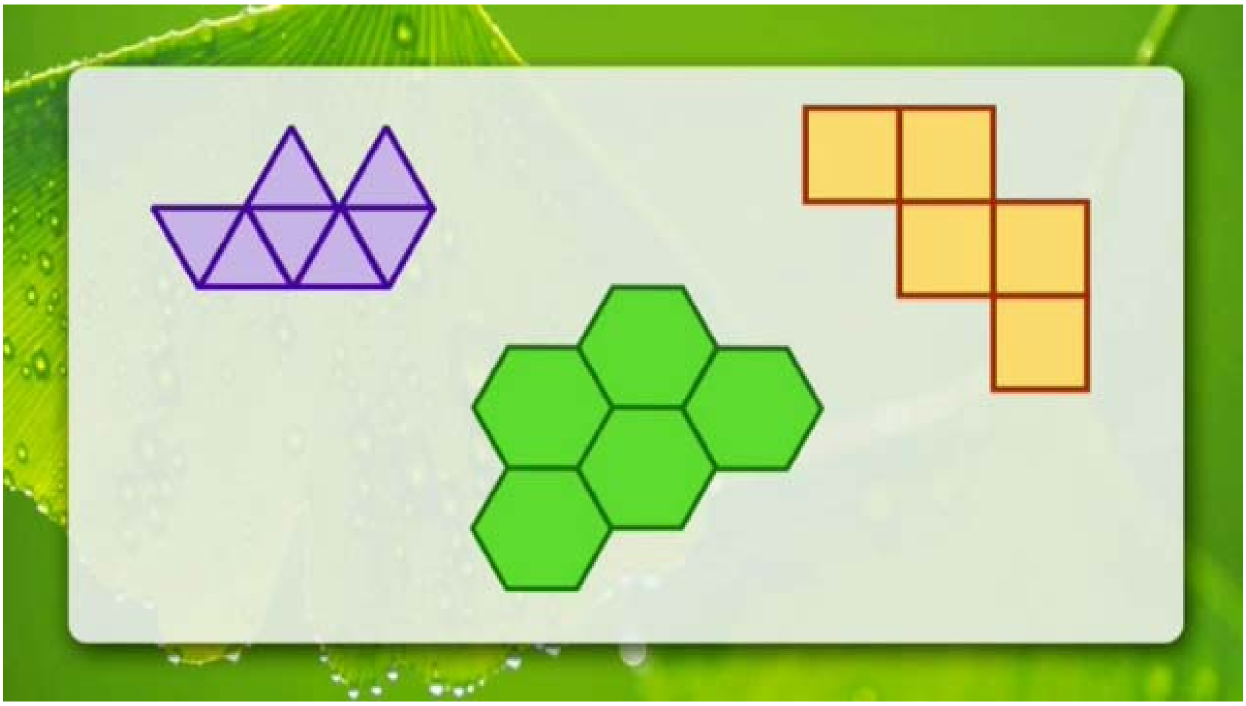


Figura 3: exemplos de ladrilhamento

As simetrias apresentadas no programa são utilizadas para despertar o interesse dos alunos, não pretendendo esgotar o assunto.

São também apresentados dois tipos de espirais, a espiral conhecida como de Arquimedes, que possui diferença constante entre duas voltas e cuja idéia intuitiva pode ser dada por uma cobra enrolada. A outra espiral apresentada no programa possui crescimento exponencial e é conhecida como espiral logarítmica. Utilizando coordenadas polares, nas quais α é interpretado como ângulo (em radianos) entre o vetor posição do ponto da curva e o eixo do x e r como a distância do ponto à origem (distância polar), podemos utilizar equações que descrevem cada uma destas espirais [2]:

Espiral de Arquimedes: $r = a\alpha + b \ (a > 0,\ b \geq 0)$(linear).

Espiral Logarítmica: $r = a.q^{\alpha}$ $(a > 0,\ q>1)$ (exponencial).

A espiral logarítmica apresenta uma propriedade relacionada a figuras auto-semelhantes. Esta característica parece ser uma indicação do porque da frequência de formatos como este na natureza.

Da sua equação tem-se que a distância entre as voltas cresce geometricamente a uma razão constante de $q^{2\pi}$. Uma aproximação poligonal desta espiral pode ser construída por triângulos semelhantes como ilustrado na figura.

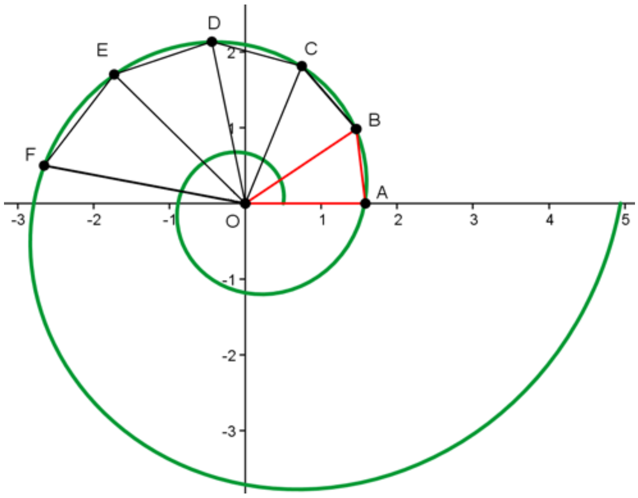


Figura 4: espiral logarítmica

Considerando a espiral logarítmica descrita por $r = 0,5.(1,2)^{\alpha}$ *(*α em radianos), *os triângulos OAB, OBC, OCD, etc são semelhantes com* $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = \ldots \cong 0,59 rad \cong 33,8°$ *e* $O\hat{A}B = O\hat{B}C = O\hat{C}D = \ldots \cong 1,45 rad \cong 83°$. *A razão de crescimento entre as voltas desta espiral é de aproximadamente 3,144.*

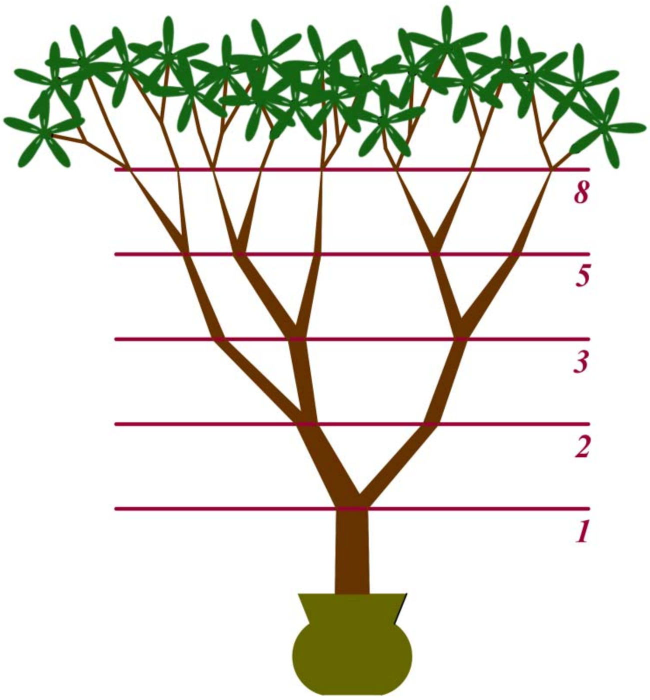
A Sequência de Fibonacci[2] de elementos F_n é dada por:

$$\begin{cases} F_1 = 1 = F_2, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

[2] Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci (filho de Bonácio) introduziu em seu livro Líber Abaci de 1202 esta sequência conhecida na matemática indiana na Europa Ocidental.

Os elementos desta sequência são apresentados no programa ilustrando números que descrevem a quantidade de pétalas de algumas flores.

Embora este fato não seja abordado neste programa esta sequência está relacionada ao chamado número de ouro, bastante utilizado em trabalhos de arte. Consideramos a sequência formada por todas as razões $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, onde F_n e F_{n+1} são dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Temos que $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\Phi$, na qual $\Phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, o número de ouro [3].



Os números da seqüência de Fibonacci ainda podem aparecer na natureza representando o crescimento de galhos de algumas plantas, ou mesmo em filotaxia, representando o arranjo de folhas ao redor de um caule [2].

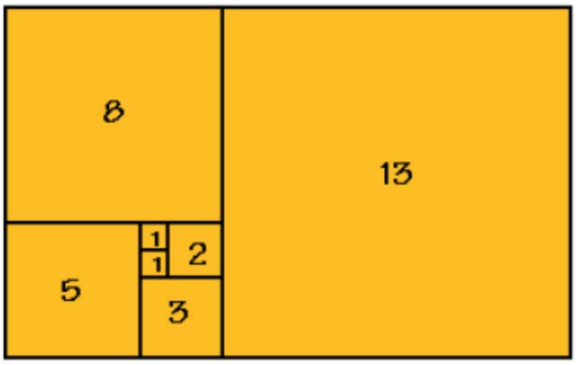


Figura 5: construção de uma aproximação do retângulo áureo

Os números da sequência de Fibonacci também são utilizados para a construção de uma curva bastante conhecida, que é a "pseudo-espiral" de Fibonacci. Para a construção desta "espiral" utilizamos dois quadrados de lado 1 colocados lado a lado, obtendo um retângulo de dimensões 2x1. Ao lado do retângulo obtido colocamos um quadrado de lado 2, obtendo assim um retângulo 3x2. Ao lado deste retângulo colocamos um quadrado de lado 3, obtendo assim um retângulo 5x3. Continuamos a anexar quadrados de lados iguais à maior dimensão dos retângulos [3]. Os lados destes quadrados formam a sequência de Fibonacci, como mostrado na figura acima.

Utilizando um compasso, traçamos um quarto de círculo em cada quadrado, formando assim a curva que parece (mas não é) uma espiral, como é ilustrado na figura. Pode também ser notado, pelo comentário feito sobre o número de ouro acima, que os retângulos sucessivos que contém os trechos da pseudo-espiral sendo formada se aproximam do chamado retângulo áureo, cuja proporção entre os lados é o número de ouro.

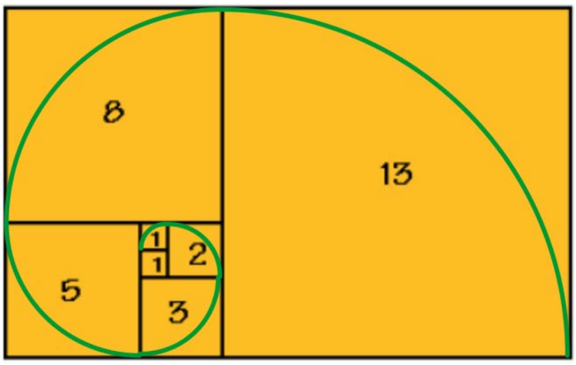


Figura 6: “pseudo-espiral” de Fibonacci

Outras imagens mostradas no programa, como a teia da aranha, podem também ser utilizadas para discussões acerca de formas e processos de otimização encontrados na natureza [2].

Sugestões de atividades

Antes da execução

Por ser um programa que abrange diversos assuntos, não só da matemática, o professor pode, antes da exibição do programa, dar ênfase a aspectos que facilitem o trabalho que será desenvolvido depois.

Sugestão de atividade para os alunos

- Calcular as áreas de um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono regular de mesmo perímetro. Da mesma maneira, fixando um valor para a área o professor pode solicitar aos alunos que comparem os perímetros de um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono regular, com esta área.

O professor também pode promover um pequeno debate com os alunos, listando algumas formas matemáticas que eles observam na natureza e após a exibição do programa chamar atenção, sobretudo aos processos de otimização.

Depois da execução

Sugestão de atividades para os alunos

Polígonos regulares e ladrilhamento

Demonstrar que apenas os triângulos equiláteros, os quadrados e os hexágonos regulares ladrilham o plano.

Fórmula da área de um polígono regular de n lados

Deduzir, a partir da decomposição em triângulos e expressões trigonométricas, a expressão

$$A_n n tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = p^2$$

para o cálculo da área de um polígono regular de *n* lados.

Áreas de retângulos

Demonstrar que de todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o que possui maior área. A demonstração pode ser realizada estabelecendo-se a função área de um retângulo qualquer, com perímetro fixo e utilizando máximos e mínimos de uma função quadrática (vértice da parábola).

Ladrilhamento com quadriláteros

Solicitar aos alunos que desenhem um quadrilátero (regular ou não) e reproduzam muitas cópias deste em folhas coloridas. O aluno deverá cobrir a mesa encaixando um quadrilátero no outro (ladrilhamento). Após realizar a atividade o professor poderá demonstrar que qualquer quadrilátero ladrilha o plano [1].

Espirais e auto-semelhança

Construir com régua e compasso um triângulo obtuso com três lados diferentes e a partir dele construir uma sequência de triângulos semelhantes ao primeiro, de modo que o lado maior de um triângulo coincide com o lado médio do seguinte, como a sequência de triângulos na figura da espiral logarítmica que está no texto. A poligonal formada pelos lados menores dos triângulos da sequência aproxima uma espiral logarítmica.

Sequência de Fibonacci

Propor o problema envolvendo os casais de coelhos, que consta do livro de Fibonacci, enunciado abaixo:

- Cada casal de coelhos consegue se reproduzir aos dois meses de idade.

- Todos os meses, a partir dos dois iniciais, cada casal de coelhos dá origem a um novo casal de coelhos.

Se todos os casais de coelhos se reproduzirem da mesma forma que o primeiro, quantos casais de coelhos haverá no começo de cada mês?

Referências Bibliográficas e Sugestões de leitura

[1] S. Alves, *Ladrilhando o plano com quadriláteros,* Revista do Professor de Matemática, n° 51.
[2] E. Batschelet, *Introdução à Matemática para Biocientistas*, Editora Interciência.
[3] F. M. P. Mendes, *A Matemática na Natureza* , Dissertação de Mestrado, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, (2007).
[4] C. G. T. A. Moreira, N. C. Saldanha , *A desigualdade Isoperimétrica* , Matemática Universitária, n° 15, 13-19, 1993.
[5] S. I. R. Costa, M. A. Grou (Coord.), *Observando a Natureza*, vídeo 20 min. Editora da Unicamp, 2002.

Ficha técnica

Autor do Guia: *Sueli Costa e Roberto Limberger*
Revisão do Guia: *Claudina Izepe Rodrigues*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*