Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Música quase sem compositor

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Aplicar sequências numéricas à música;
2. Introduzir o conceito de iteração ou repetição;
3. Aplicar permutações e combinações à música.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Música quase sem compositor

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Sequências, funções, repetição, iteração.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Aplicar sequências numéricas à música;
2. Introduzir o conceito de iteração ou repetição;
3. Aplicar permutações e combinações à música.

Sinopse
Steve questiona a composição musical de maneira radical: ele quer uma música que seja criada sem um compositor, ou quase isso.

Material relacionado
Experimentos: *Padrões no plano;*
Vídeos: *Música quase por acaso.*

Introdução

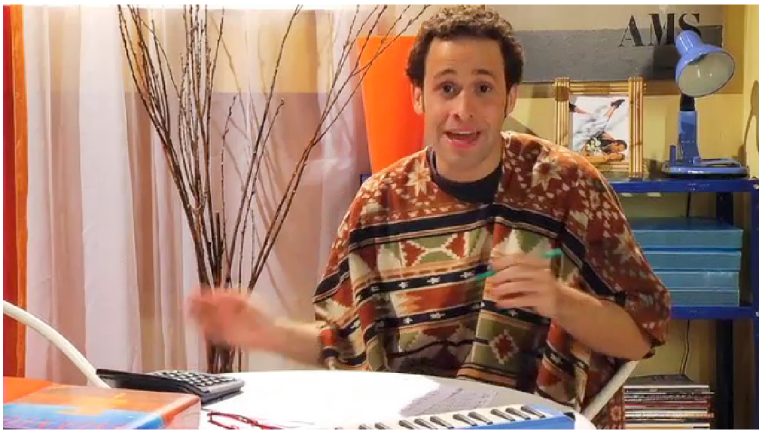
Sobre a série

A série *Matemática na Escola* aborda o conteúdo de matemática do Ensino Médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático; além disso, pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Dois compositores conversam sobre a possibilidade de uma música ser criada sem a vontade do compositor, ou quase isso.

Steve tem um conceito mais amplo e não convencional do que é música. Neste contexto, ele pensa em uma música que pode ser composta a partir de si mesma.



A inspiração de Steve vem de uma viagem à África e também da matemática, com o chamado *processo* (ou método) *de iteração*. O exemplo dado no vídeo é o de usar a função raiz quadrada de maneira repetida, isto é, começando pelo número 34 obtém-se a sua raiz quadrada e, a este resultado, aplica-se novamente a função raiz quadrada... Assim, obtemos uma sequência de números reais, arredondados na segunda casa decimal:

34; 5,83; 2,41; 1,55; 1,25; 1,12; 1,06; 1,03

O colega de Steve percebe que essa sequência converge, isto é, se aproxima indefinidamente, do número 1. De fato, veja o teorema abaixo.

Teorema. Para todo número real $a>0$, a sequência $x(k+1)=\sqrt{x(k)}$, para k natural e $x(1)=a$, converge para 1 à medida que k vai pra infinito.

Demonstração levemente informal. É fácil ver que

$x(1)=a$, $x(2) = a^{1/2}$, $x(3) = a^{1/4}$, ...

Daí, por indução finita, podemos mostrar que

$$x(k) = a^{\frac{1}{2^{k-1}}}.$$

O professor pode propor que os alunos provem a fórmula acima como uma aplicação do Princípio de Indução Finita.

É importante que a>0, pois neste caso usamos a propriedade de que a^0=1. Observe agora que

$$\frac{1}{2^{k-1}}$$

é tão pequeno quanto se queira para grandes valores de *k*, isto é, a sequência de números acima converge para 0 (zero). Em outras palavras, a potência de *a* converge para zero à medida que *k* vai para infinito.

Daí $x(k) = a^{\frac{1}{2^{k-1}}}$ converge para a^0=1.

Observe que a demonstração informal acima assume que a função raiz quadrada é uma função contínua. Desenhe o gráfico da função raiz quadrada para mostrar informalmente essa continuidade. ♦

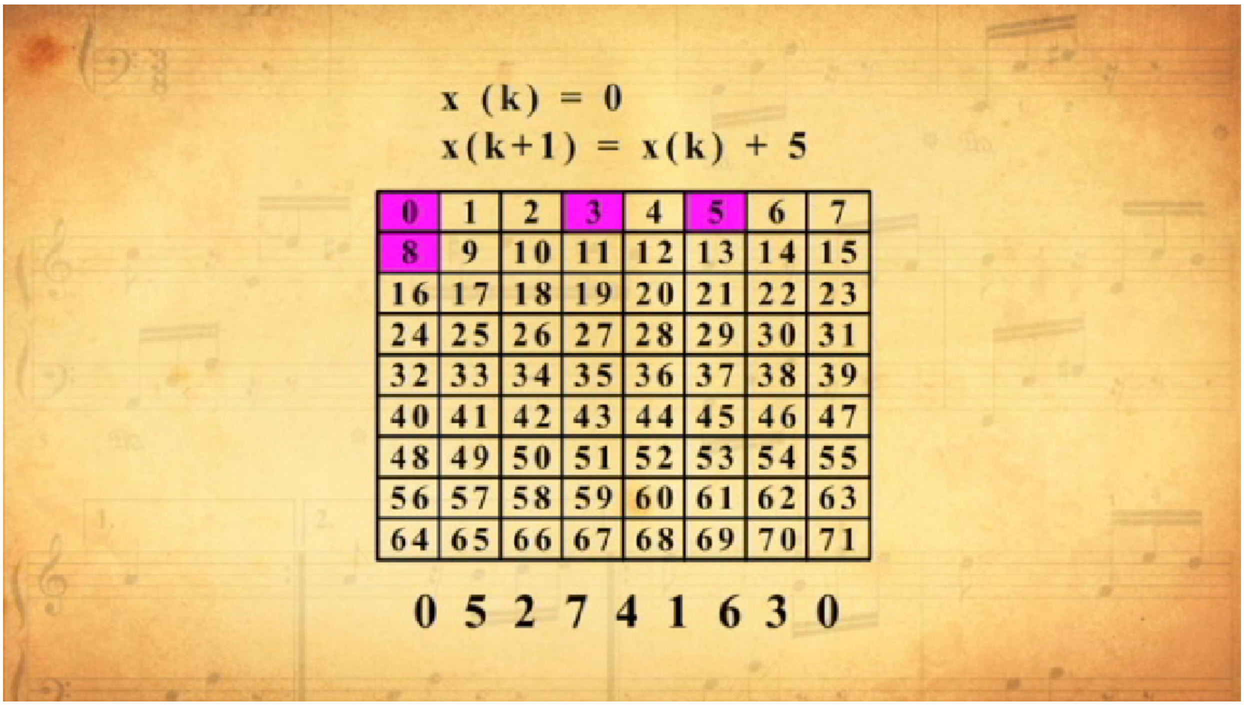
O segundo exemplo dado no vídeo é o da função iterativa *x(k+1)=x(0)+8 k* para *k* inteiro não negativo e *x(0)* pode ser qualquer número. Mas Steve pensa em escrever os valores dessa função iterativa para todos os números inteiros não negativos *k*, e ele organiza os resultados em uma tabela conveniente:

Tabela 1 Sequência e órbitas do Oito

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
...							...

Cada coluna é um subconjunto dos números inteiros, que Steve chama de *órbita dos primeiros oito números de zero a oito*. Em seguida ele constrói a sequência do Cinco, isto é $x(k+1)=x(k)+ 5\ k$ para k inteiro não negativo e $x(0)$ pode ser qualquer número. Mas Steve pensa em calcular os valores desta função iterativa com os números da tabela do Oito. Toda vez que o resultado da iteração da sequência do Cinco dava maior que sete, ele considerava o número correspondente na coluna da órbita do Oito. Assim, ele obteve a seguinte sequência que se repetiria indefinidamente:

0, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3, 0



A estes números Steve fez uma associação de ritmo e notas e obteve um trecho musical. Aqui entra o compositor musical.

No entanto, com outros pontos de partidas ou outras funções iterativas, pode-se “passear” pelas órbitas do Oito e assim construir novas músicas.

O *Olha o curta* apresenta o compositor minimalista Steve Reich e John Cage, o polêmico compositor da obra 4 min e 33 s em que o músico, em vez de tocar, fica apenas olhando para as teclas do piano sem se mover. Cage quis mostrar com isso que os sons ambientes também podem ser considerados música.

Fazemos uma rápida revisão de termos musicais abaixo.

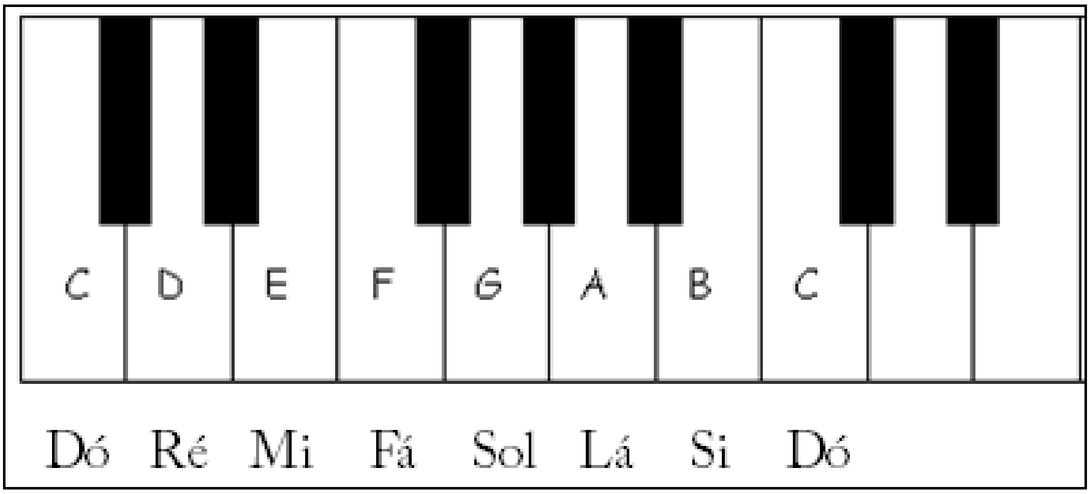
Notas

Uma nota musical é o som proveniente de uma fonte sonora, na maioria das vezes um instrumento musical, que ouvimos com uma frequência determinada predominante, chamada *frequência fundamental*. O ouvido humano consegue distinguir 1400 frequências discretas, mas na chamada escala temperada da música convencional do ocidente existem apenas 120 notas musicais ou tons discretos, os quais podem ser facilmente percebidos e diferenciados pela maioria das pessoas.

Acordes
Um acorde, em música convencional, é um conjunto de notas musicais tocadas simultaneamente.

Os acordes simples têm três notas diferentes e são chamados *tríades.* O estudo das combinações de notas em acordes e seu uso em composição musical são denominados *Harmonia*.

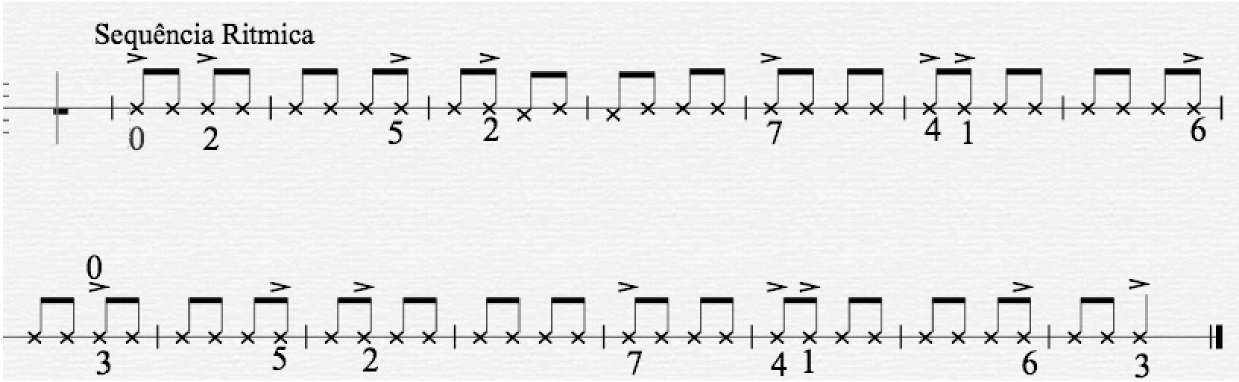
Melodia
Melodia é uma sucessão de notas individuais, ou seja, uma sequência de notas tocadas de maneira sucessiva, com durações e intervalos de tempos inventados pelo compositor.



A imagem acima mostra as posições das notas de uma oitava de escala em um piano.

Observe o tema melódico abaixo que foi tocado no vídeo pelo Steve. Ele contém as acentuações rítmicas, isto é, as marcações grifadas com sinal “>” tocadas sempre por duas notas (intervalo musical de terça) e que correspondem exatamente à sequência numérica 0-2-5-2-7-4-1-6-3-0 tocadas duas vezes.

Na figura abaixo mostramos somente a estrutura rítmica sem as notas musicais:



Existem 8!=40.320 possíveis caminhos para Steve compor. Isto é claro, pois para a primeira nota da melodia temos oito escolhas possíveis; para a segunda, uma vez que não vamos considerar melodias com notas repetidas, temos sete possibilidades, e assim por diante até sobrar uma única nota. Portanto, temos 8! diferentes melodias. Claramente há melodias muito parecidas umas com as outras, pois elas podem diferir de apenas uma nota!

Observe que oito e cinco não têm divisores comuns, o que é importante para que a repetição não ocorra muito logo. Por exemplo, se Steve considerasse a sequência iterativa $x(k)=x(0)+4\ k$ nas órbitas do Oito, o conjunto de números seria composto por no máximo quatro números ao invés de oito. Neste caso, teríamos combinação de 8 quatro a quatro, isto é, 8!/(4! 4!)=70. Mesmo assim, temos muitas possibilidades.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Sugerimos desenvolver o Experimento da coleção M^3 chamado *Padrões no Plano*. Neste experimento obtemos desenhos no plano quase sem desenhista.

Depois da execução

O professor pode apresentar o desafio de composição de um pequeno trecho musical com as ideias do programa. Uma vez montada a sequência de números, os alunos devem decidir o significado musical atribuído a eles. Com a ajuda de um instrumentista ou de um programa de editor de partitura musical, uma proposta seria tocar as obras compostas pelos alunos. Sugerimos que esta atividade seja feita em trios, se possível.

Como o programa trata também de permutações e combinações, sugerimos os seguintes desafios.

Dinâmica do milhar
Considere um número entre um e mil inclusive, isto é, um elemento do subconjunto dos naturais {1,2,3,4, ..., 999, 1000}. Vamos chamar esse subconjunto de milhar, para referência.

Escolhido um número do conjunto de milhar, some o quadrado dos seus dígitos. Mostre que o resultado também é um número do conjunto de milhar.

Por exemplo, 173 vai gerar o novo número 1+49+9=59. Se repetirmos o procedimento, teremos 25+81=106; depois, 1+36=37; depois, 9+49=58; depois, 25+64=89 e assim por diante. Resumindo, temos uma sequência (173, 59, 106, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37 ...) e uma vez chegado ao 37, os números obviamente se repetem. Incentive os alunos a tentarem seus próprios pontos de partida.

Há alguns números que atingem o 1 e daí em diante não muda. Há outros que entram em um ciclo. Por que isso acontece?

Primeiro devemos mostrar que o procedimento é fechado no conjunto do milhar. Para isso, perceba que os números considerados têm um, dois ou no máximo três dígitos. Ao somar o quadrado destes dígitos, podemos perceber que o máximo que poderíamos atingir seria o caso em que os três dígitos são nove, isto é, 999 e neste caso o procedimento vai retornar $3x9^2$, isto é, o número 3x81=243.

Assim, além de mostrar, com um argumento simples, mas poderoso, que o procedimento é fechado no conjunto do milhar, percebemos que se considerarmos números maiores que 243, mas menores ou iguais a 1000, o procedimento vai retornar um número menor que 243.

Se o procedimento for iterado a partir de qualquer número deste conjunto, que é finito, mais cedo ou mais tarde ele vai se repetir e desta forma vai gerar um ciclo. Este é um argumento poderoso, que pode ser generalizado para outros conjuntos finitos com procedimentos que gerem números no próprio conjunto - mas não pode ser generalizado para conjuntos com infinitos elementos.

Provoque os alunos para perceberem que há “órbitas” com alguns números que invariavelmente levam a repetições. Desafie os alunos a inventarem novos procedimentos de iteração, como feito no vídeo ou como feito acima.

Sugestões de leitura

H. Olson (1967). **Music, physics and engineering.** Dover 2nd ed.
NRICH, *Whole Number Dynamics*, http://nrich.maths.org/1314. Visto em 10/01/2011.

Ficha técnica

Autor *Samuel Rocha de Oliveira*
Revisão *Adolfo Maia Jr. e Jonatas Manzolli*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*