



Matemática
Multimídia

Números
e funções



Guia do Professor



Vídeo

Música quase por acaso

Série Matemática na Escola

Objetivos

1. Introduzir o conceito de probabilidade de transição;
2. Introduzir Cadeias de Markov;
3. Usar matrizes, estatística e probabilidade para compor uma música.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 



UNICAMP



FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação

Governo
Federal

Música quase por acaso

Série

Matemática na Escola

Conteúdos

Música, Markov, Matrizes, Probabilidade, Probabilidade condicional, Estatística.

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivos

1. Introduzir o conceito de Cadeias de Markov;
2. Usar matrizes de transição em uma música;
3. Usar matrizes, estatística e probabilidade para compor uma música simples.

Sinopse

Um jovem aprende com um experiente músico como compor usando estatística, Cadeias de Markov, matrizes e probabilidade.

Material relacionado

Experimentos: *Apostas no relógio*;

Softwares: *Aviões e matrizes*, *Grafos*;

Vídeos: *Que a força esteja com você*, *Um caminho de combate à Dengue*, *Caçadores de som de Fibonacci*, *Luthier de proporções*.

Introdução

Sobre a série

A série *Matemática na Escola* aborda o conteúdo de matemática do Ensino Médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático; além disso, pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Um músico jovem iniciante tem a tarefa de compor músicas com temas de matemática. Felizmente um experiente músico dá várias dicas de composição, usando a própria matemática.



A música é uma extraordinária forma de expressão artística e pode, entre outras de suas qualidades, transmitir emoções. Apesar disso, a música também pode ser encontrada ao longo da história como um produto de raciocínios lógicos ou ainda procedimentos mecânicos, isto é, um procedimento com algoritmo como de um programa de computador.



O vídeo aborda alguns conceitos musicais apenas superficialmente, pois o objetivo principal é mostrar uma possibilidade de composição algorítmica com ferramentas matemáticas.

Vamos abordar alguns dos assuntos que o vídeo trata, com ênfase na matemática. A abordagem desse guia deve servir como ponto de partida para mais estudos, se o professor julgar conveniente e necessário.



De acordo com o dicionário Aurélio música é “arte e ciência de combinar os sons de modo agradável aos ouvidos”.

O som é um fenômeno físico que compreende a geração e propagação de perturbações de pressão em um fluido (ar ou água). Os nossos ouvidos de alguma forma filtram algumas e amplificam outras dessas perturbações para que nosso cérebro registre e processe a informação

sonora. Essas perturbações podem ser caracterizadas por oscilações que têm amplitude e frequência.

Notas

Uma nota musical é o som proveniente de uma fonte sonora, na maioria das vezes um instrumento musical, que ouvimos com uma frequência determinada predominante, chamada *frequência fundamental*. O ouvido humano consegue distinguir 1400 frequências discretas, mas na chamada escala temperada da música convencional do ocidente existem apenas 120 notas musicais ou tons discretos, os quais podem ser facilmente percebidos e diferenciados pela maioria das pessoas.

Acordes

Um acorde, em música convencional, é um conjunto de notas musicais tocadas simultaneamente.

Acordes simples têm três notas diferentes, tocadas ao mesmo tempo.

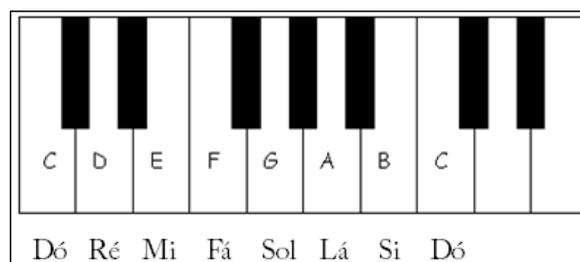
Harmonia é o estudo das combinações de notas em acordes e seu uso em composição musical.

Melodia

Melodia é uma sucessão de notas individuais, ou seja, uma sequência de notas tocadas de maneira sucessiva, com durações e intervalos de tempos inventados pelo compositor.

O programa considerou os acordes maiores, isto é, os acordes associados às sete notas da escala musical abaixo. A tabela mostra os nomes e os respectivos símbolos convencionais.

Dó	Ré	Mí	Fá	Sol	Lá	Sí
<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>A</i>	<i>B</i>



A imagem acima mostra as posições das notas de uma oitava de escala em um piano. As notas pretas são os sustenidos ou bemóis.

Assim, os acordes maiores mencionados no vídeo são:

1. Dó Maior: Dó, Mi e Sol;
2. Ré Maior: Ré, Fá e Lá;
3. Mi Maior: Mi, Sol, Si;
4. Fá Maior: Fá, Lá e Dó;
5. Sol Maior: Sol, Si, Ré;
6. Lá Maior: Lá, Dó, Mi;
7. Si Maior: Si, Ré, Fá.

Isto é, considera-se uma nota de base que é a primeira, mais a terceira e a quinta, em relação a ela, e assim ciclicamente. Observe que a primeira nota é a que tem a menor frequência, ou seja, é a mais grave do acorde (por convenção) e, desta forma, os acordes de Sol, Lá e Si maiores têm notas em duas oitavas. A primeira nota é a nota de grau um como o vídeo mostra. O vídeo mostra que a cada nota da escala maior está associado um grau que vai de I a VII.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7
II	0	0	0	1/7	6/7	0	0
III	0	0	0	0	1/7	6/7	0
IV	1/7	0	0	0	6/7	0	0
V	6/7	0	0	0	1/7	0	0
VI	0	6/7	0	0	1/7	0	0
VII	6/7	0	0	0	1/7	0	0

Com estas definições, o músico-matemático do programa apresenta uma tabela que representa o resultado de um estudo estatístico das transições mais comuns entre os acordes de um gênero musical popular.

Tabela 1 Probabilidades de transição

A leitura e interpretação desta tabela é a seguinte. A primeira coluna indica os possíveis acordes de um certo momento e a primeira linha os possíveis acordes do próximo momento. Os números de uma linha indicam a frequência com que um acorde vai passar para outro.

Assim, a primeira linha indica que, estando no acorde de grau I, a probabilidade de ir para qualquer outro acorde é a mesma, $1/7$. Digamos que se escolha ir para o acorde de grau II. Então, estando no grau II a probabilidade de ir para o grau IV é $1/7$ e a probabilidade de ir para o grau V é $6/7$. Digamos agora que a escolha seja ir para o grau IV. Então, estando no grau IV, as probabilidades de ir para os graus I e V são $1/7$ e $6/7$ respectivamente, e para os outros acordes a probabilidade é nula, isto é, a transição nunca acontece, e assim por diante.

Note, na Tabela 1, que a estatística do músico não contém algumas transições, e por isto suas probabilidades são indicadas pelos zeros da tabela. Observe também que a soma das entradas em cada linha é exatamente um, pois representa a soma das frequências relativas que deve ser **1 (um)**, ou, em outras palavras, a soma das probabilidades de todas as transições possíveis a partir de um estado fixo (aqui um acorde fixo) é sempre igual a 1.

Por que algumas transições são mais preferidas do que as outras? O músico do vídeo diz apenas que as tonalidades formam uma hierarquia entre os acordes e que algumas transições são mais agradáveis que outras. Essas transições com maior probabilidade estão relacionadas ao modo de cantar da música ocidental – é uma questão cultural.

Cadeia de Markov

Neste ponto, o músico matemático apresenta a Cadeia de Markov, que pode ser pensada como uma sequência de estados de um sistema (um sistema físico, por exemplo) em que a probabilidade de realização (ou seja, de ele acontecer) de um estado em um determinado instante depende somente da probabilidade do estado anterior acontecer e da probabilidade de transição de um do estado anterior para o atual.

Por exemplo, a tabela de probabilidade de transição, como a Tabela 1 dada acima, e a sequência de acordes (cada acorde considerado como um estado) depende apenas da probabilidade do acorde anterior acontecer e da probabilidade de transição dada pela tabela.

Para tornar a tabela de probabilidade em uma de transição operacional, o músico propõe uma alteração no sentido de construir uma matriz do tipo acumulada. Em seguida, multiplica os valores por 12, para que os números arredondados que apareçam na tabela sejam os números possíveis de se obter na soma dos valores obtidos de dois dados. Com isso, o músico iniciante pode compor uma música com algumas escolhas, usando o acaso.

Tabela 2 Matriz do tipo acumulada

	SOL	LÁ	SI	DÓ	RÉ	MI	FÁ
SOL	2	3	5	7	9	10	12
LÁ	0	0	0	2	12	0	0
SI	0	0	0	0	2	12	0
DÓ	2	0	0	0	12	0	0
RÉ	10	0	0	0	12	0	0
MI	0	10	0	0	12	0	0
FÁ	10	0	0	0	12	0	0

Sugestões de atividades

Antes da execução

Revisar o conceito de frequência relativa e probabilidades e considerar as notas musicais na Escala Temperada.

Escala temperada

Nesta escala, a frequência do som de um Dó é o dobro da do outro Dó (dizemos que é de uma oitava acima). Entre um e outro há 12 notas, a saber, Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá#, Si. Observe que além das notas famosas, a escala contém os sustenidos representados pelo símbolo #. Assim as frequências dos sons de cada nota serão definidas pela sequência abaixo:

$$1 \leq 2^{\frac{n}{12}} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 12$$

Assim, podemos fazer a relação:

(Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá#, Si) \leftrightarrow (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)

O som de uma nota pura tem uma única frequência e a pressão do ar oscila na forma de uma função senoidal com o tempo. Por exemplo, o gráfico abaixo que representaria o Dó:

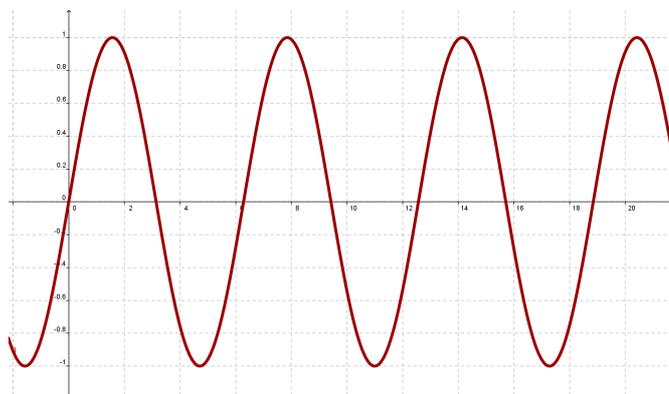


Figura 1 Função seno

Um acorde maior é a superposição de três notas. Nesse caso a pressão do som seria representada pela soma de três funções senoidais de frequências diferentes.

Por exemplo, o acorde Dó maior é composto por Dó, Mi e Sol e tem a seguinte representação, a partir do Dó em com $n=0,4,7$:

$$s(t) = \sin(t) + \sin\left(2^{\frac{4}{12}}t\right) + \sin\left(2^{\frac{7}{12}}t\right)$$

O gráfico desta função está abaixo:

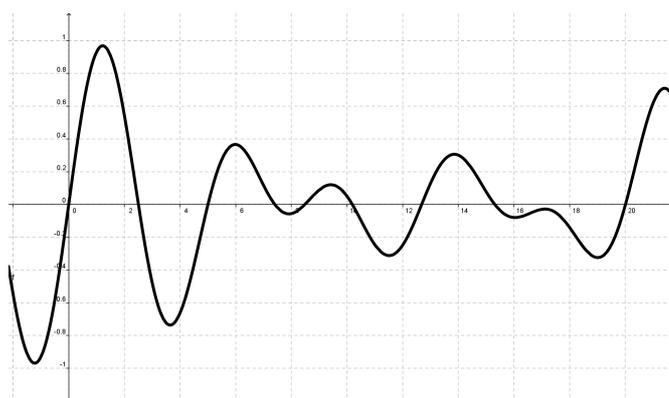


Figura 2 Função $s(t)$ que é a soma de três funções senoidais

Percebemos, ao comparar Figura 1 e Figura 2 acima, que um acorde tem maior complexidade do que uma nota simples. Essas funções senoidais são chamadas *Parciais de Fourier* em homenagem ao matemático francês Jean-Baptist Joseph Fourier que as descobriu. Esta técnica de construir novos sons a partir da soma de funções básicas, como as parciais de Fourier, é denominada *Síntese Aditiva*.

Como preparativo para este tipo de conceito, recomendamos a construção da função $f(x) = \text{sen}(x) + \text{sen}(3x)$, para $x \in [0, 2\pi]$ em radianos. Use os ângulos notáveis para obter alguns valores e depois, por identidades trigonométricas mais valores até ter um padrão para o gráfico.

Tabela 3 Alguns valores de $f(x) = \text{sen}(x) + \text{sen}(3x)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

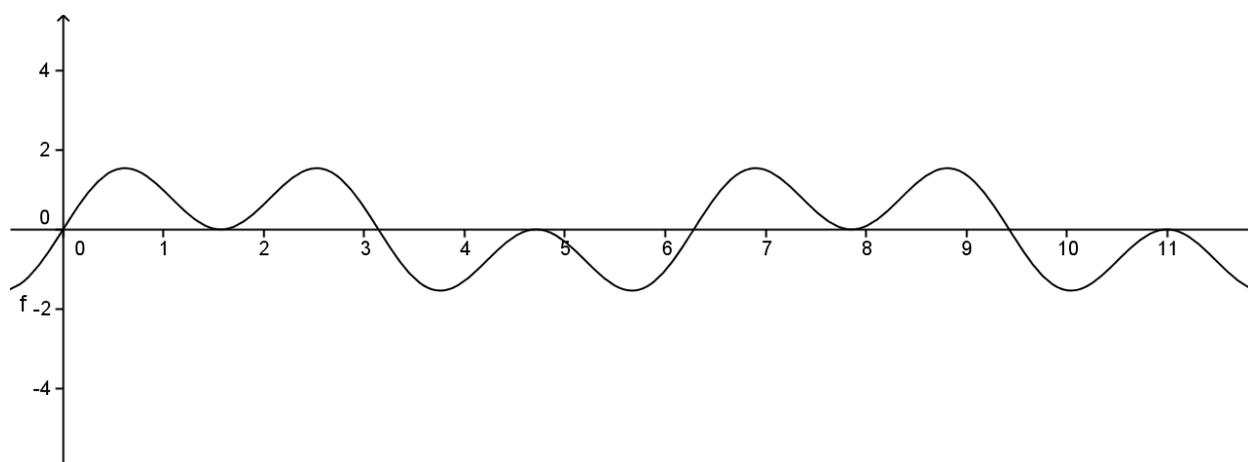


Figura 3 Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x) + \text{sen}(3x)$

Durante a execução

Para que todos entendam o significado das tabelas e matrizes, o professor pode dar uma pausa ou repetir as explicações pertinentes do vídeo.

Depois da execução

O professor pode dar o desafio de composição de um pequeno trecho musical com as ideias do programa. Uma vez montada a sequência de acordes, os alunos devem escolher a duração de cada acorde e solicitar que um instrumentista toque as músicas feitas quase por acaso.

Sugestões de leitura

H. Olson (1967). **Music, physics and engineering**. Dover 2nd ed.

Ficha técnica

Conteudista *Samuel Rocha de Oliveira*

Revisão *Adolfo Maia Jr. e Jonatas Manzolli*

Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*

Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas

Reitor *Fernando Ferreira Costa*

Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*

Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diretor *Jayme Vaz Jr.*

Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*