



Matemática
Multimídia

Geometria
e medidas



Guia do Professor



Vídeo

Luthier de Proporções

Série Matemática na Escola

Objetivos

1. Relacionar música e matemática;
2. Apresentar uma aplicação de logaritmos à música;
3. Discutir exemplos de proporções matemáticas na natureza.



UNICAMP

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons

FNDE

FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação



Luthier de Proporções

Série

Matemática na Escola

Conteúdos

Proporções matemáticas em música.

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivos

1. Relacionar música e matemática;
2. Apresentar uma aplicação de logaritmos à música;
3. Discutir a respeito de proporções matemáticas na natureza.

Sinopse

O Zé quer construir seu próprio vibrafone de garrafas, mas não entende muito de instrumentos musicais e, por isso, pede ajuda a seu amigo Márcio, que é músico. Enquanto este o ajuda na construção, Zé descobre que música e matemática estão estreitamente relacionadas, podendo esta última descrever a primeira.

Material relacionado

Experimentos: *Espelhos e simetrias*;

Vídeos: *Sinfonia de poliedros* .

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Este vídeo descreve matematicamente para o aluno a escala musical cromática, ao mesmo tempo em que o apresenta ao conceito de proporções.



Figura 1. Vibrafone de garrafas do Zé.

Na ficção, Zé constrói seu próprio vibrafone de garrafas — um instrumento musical do qual se extrai som de garrafas preenchidas com água — e, ao tentar afiná-lo, aprende que a matemática pode auxiliá-lo nesta complicada tarefa.

Em matemática, proporção é a igualdade entre duas razões. Assim como a idéia de simetria, a proporção é um aspecto da natureza que fascina o homem, influenciando-o em sua arte e cultura desde a Antigüidade.

Conta a história que Pitágoras descobriu a harmonia da música ao ouvir um ferreiro golpear o ferro com seus martelos. Enquanto este dava forma ao metal, moldando-o a cada batida, uma verdadeira reunião de sons era produzida, muitos dos quais, harmoniosamente entre si. Tentando justificar o porquê isto acontecia, Pitágoras examinou os martelos do ferreiro e acabou descobrindo que os pesos do conjunto de martelos que produziam sons em harmonia formavam frações simples entre si. Aplicando, então, sua nova descoberta a apenas uma das quatro cordas do tetracórdio, o principal instrumento da antiga música helênica, Pitágoras concluiu que somente prendendo-a em pontos que formavam uma fração simples do seu comprimento é que as notas produzidas se harmonizavam umas com as outras.

Hoje em dia sabe-se que o som é uma onda e, como tal, possui uma freqüência. O ouvido humano interpreta sons cujas freqüências estão na proporção de $2:1$ como equivalentes, sendo o intervalo de freqüências delimitado por quaisquer dois sons equivalentes denominado oitava. Embora desconhecesse a natureza do som, o que Pitágoras fez foi essencialmente dividir a oitava de uma maneira bastante particular. Às divisões da oitava dá-se o nome de escalas musicais. Partindo de um raciocínio análogo ao de Pitágoras, muitas escalas musicais foram inventadas ao longo dos séculos. Para os chineses, por exemplo, a oitava é dividida em cinco partes, enquanto para os árabes, em 24 e para os indianos, em 22 ou 28, dependendo da região da Índia. Em particular, a escala musical apresentada neste vídeo, conhecida como escala temperada, é obtida dividindo-se a oitava em doze partes, ou melhor, em doze notas: se f_0 é a freqüência de uma nota qualquer, as 12 notas da oitava construída a partir desta nota base terão freqüências:

$$2^0 f_0, 2^{1/12} f_0, \dots, 2^{11/12} f_0, 2^{11/12} f_0.$$

Históricamente, Rameau sistematizou musicalmente o uso da escala temperada e Bach escreveu a famosa obra “O Cravo bem temperado” usando o sistema de Rameau, dois passos importantes para a Música Ocidental.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Professor, antes de exibir este vídeo aos seus alunos, converse breve e informalmente com eles sobre os tópicos aqui apresentados, sempre procurando despertar a curiosidade matemática em cada um deles. Ela é imprescindível para o bom aproveitamento deste material. Uma boa maneira de se fazer é isto é questionando seus alunos acerca do que eles acreditam que o famoso matemático Leibnitz quis dizer ao afirmar: *"A música é um exercício secreto de aritmética e aquele que a ela se entrega às vezes ignora que maneja números."*

Depois da execução

Retome a discussão da afirmação realizada por Leibnitz, construindo para seus alunos a escala musical Pitagórica, detalhada a seguir.

Escala Pitagórica: Trata-se de uma escala construída dividindo-se convenientemente uma oitava em sete partes. Para obtê-la, tome uma oitava qualquer, por exemplo, dadas pelas notas Dó₄ e Dó₅ de freqüências 261 e 522 Herz, respectivamente. Daí encontre as notas Sol₄ ($3 \times 261/2 = 392$ Hertz) e Fá₄ ($4 \times 261/3 = 348$ Hertz), nesta ordem. Estes quatro primeiros sons assim conseguidos são chamados de consonantes, em referência à percepção de harmonia e equilíbrio que existem entre eles. Observando, então, que o quociente entre as freqüências das notas Sol₄ e Fá₄ é aproximadamente 9/8, ou seja, o

que em música denomina-se de *intervalo de um tom*, multiplique as freqüências do Dó₄ e Sol₄ por esta fração e obtenha Ré₄ e Lá₄, ambas um tom acima das notas precedentes. Por fim, também multiplique as freqüências do Ré₄ e Lá₄ por $\frac{9}{8}$ e consiga as notas Mi₄ e Si₄. Em conjunto, tem-se, colocando-se entre parêntesis o fator de multiplicação para se obter a freqüência de cada nota a partir da freqüência da nota anterior:

Dó(1), Ré($\frac{9}{8}$), Mi($\frac{81}{64}$), Fá($\frac{4}{3}$), Sol($\frac{3}{2}$), Lá($\frac{27}{16}$), Si($\frac{243}{128}$),
Dó(2).

Obs1: O índice 4, indicando a quarta oitava, foi retirado das notas acima porque estas proporções valem (aproximadamente, na verdade) para todas as oitavas.

Obs2: A escala Pitagórica pode ser obtida de forma aproximada a partir da escala cromática. Por exemplo, para passar de Dó para Ré multiplicamos a freqüência por $\frac{9}{8}$ na escala Pitagórica. Na escala cromática multiplicamos a freqüência de Dó por $2^{2/12}$. Mas isto é devido que aproximadamente $\frac{9}{8} = 1,126 \approx 2^{2/12} = 1,122$. A pequena diferença entre as freqüências de uma nota nas duas escalas teve uma importância na Teoria Musical desde Rameau.

Professor, se você dispuser de um instrumento de cordas, certamente será mais lúdico para seus alunos construir a escala Pitagórica sem mencionar quais notas correspondem as freqüências encontradas.

Por envolver somente alguns poucos cálculos de frações, esta escala é bastante simples e de fácil compreensão. Ao conhecê-la, espera-se que seus alunos percebam a poesia nas palavras de Leibnitz e com isso entendam, ou pelo menos vislumbrem, a matemática como linguagem da natureza

Sugestões de leitura

Elon L. Lima (2009). Logaritmos. Sociedade Brasileira de Matemática.
Luiz Barco (1988). O Piano e a Tábua de Logaritmos. Revista Superinteressante, no. 7, abril de 1988.

Mario Livio (2006). Razão Áurea: A História do Phi. Editora Record.
Douglas R. Hofstadter (2001). Gödel, Escher, Bach: Um Entrelaçamento de Gênios Brilhantes. Editora IMESP.

Ficha técnica

Autor *Douglas Mendes*

Revisor *Adolfo Maia Jr.*

Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*

Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas

Reitor *Fernando Ferreira Costa*

Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*

Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diretor *Jayme Vaz Jr.*

Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*