Matemática Multimídia

Geometria e medidas

Guia do Professor

Vídeo

A Lenda de Dido

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar o problema isoperimétrico;
2. Apresentar aspectos históricos relativos ao problema;
3. Aplicar as soluções do problema em situações reais, com restrições.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

A Lenda de Dido

Série
Matemática na Escola

Conteúdo
O problema isoperimétrico.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar o problema isoperimétrico;
2. Apresentar aspectos históricos relativos ao problema;
3. Aplicar as soluções do problema em situações reais, com restrições.

Sinopse
A fazendeira Elisa comprou tela para fazer um cercado para as ovelhas na sua fazenda e na busca para encontrar o melhor formato para o cercado ela acaba conhecendo a princesa Dido . As duas descobrem que possuem algumas coisas em comum.

Material relacionado
Experimentos: *Otimização da Cerca, Caixa de Papel;*
Vídeos: *Naturalmente*
Softwares: *Otimização de Janelas, Janelas em arco romano, Janelas em arco ferradura;*

Introdução

Sobre a série

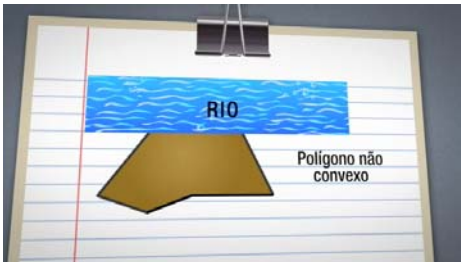
A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser desenvolvido em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

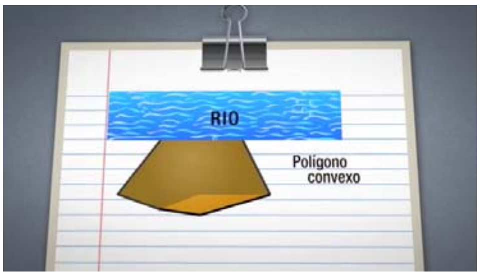
Sobre o programa

O programa aborda um problema isoperimétrico em uma situação real. A fazendeira Elisa tem oitenta metros de tela e pretende fazer um cercado para suas ovelhas. A princesa Dido surge para ajudá-la a escolher o melhor formato para esta cerca.

A apresentação da Lenda de Dido, presente no épico Eneida do poeta Virgílio, escrito no séc. I A. C. ilustra que a solução do problema isoperimétrico já era conhecida há muito tempo atrás, aparecendo em escritos dos gregos Zenódoro e Pappus[1].

O primeiro resultado apresentado no programa é que dado um polígono não convexo, sempre é possível encontrar um polígono convexo de mesmo perímetro e com área maior.





Neste caso, utiliza-se uma reflexão do vértice V que caracteriza o polígono como não convexo através da reta definida pelos dois vértices adjacentes a este. Como pode ser também observado, se considerarmos o polígono onde as duas arestas que partem de V são substituídas por uma única aresta que liga os dois vértices adjacentes a V, obtemos um polígono convexo com número de lados menor, perímetro menor e área maior [4].

Entre todos os polígonos convexos com o mesmo número de lados e mesmo perímetro, o polígono regular é o que possui maior área. Uma demonstração para este fato pode ser feita por indução sobre o número de lados [2]. A partir de um polígono qualquer, constrói-se inicialmente um polígono eqüilátero [1] e depois um regular (com ângulos também iguais), mantendo o número de lados e aumentando a área a cada passo.

No programa é realizada uma comparação entre dois quadriláteros: um quadrado de lados medindo 20 metros e um retângulo de lados medindo 10 metros e 30 metros. Mantendo fixo o perímetro de 80 metros é possível utilizar máximos e mínimos de uma função de segundo grau para mostrar que entre todos os retângulos, o quadrado possui maior área. Sejam a e b os lados do retângulo, desta forma teremos $2a + 2b = 80$, ou seja, $a + b = 40$ (I). A função área é dada por

$A = a.b$ (II), isolando b em (I) e substituindo em (II) teremos $A = a.(40 - a)$ ou ainda $A = -a^2 + 40a$, com a variando de zero a quarenta . O gráfico da função área será portanto uma parábola com a concavidade voltada para baixo. Esta função assume seu valor máximo quando $a = 20$, que é associado no gráfico ao vértice da parábola $(20, 400)$.

Quando se compara apenas polígonos regulares com o mesmo perímetro, verifica-se que o de maior área é justamente aquele com maior número de lados. A verificação desta afirmação pode ser realizada deduzindo-se a expressão geral para o cálculo da área de um polígono regular de n lados:

[1] Polígono equilátero é um polígono que tem todos os lados de medidas iguais.

$$A_n = \frac{p^2}{n \tan\left(\frac{180^o}{n}\right)} = \frac{p^2}{n \tan\left(\frac{\pi\, rad}{n}\right)}$$

na qual p representa o semi-perímetro e n o número de lados da figura[2]. Como a seqüência de áreas (A_n) é crescente[3], temos que a área cresce em função do número de lados n.

A partir de uma consideração de polígonos regulares de n lados, inscritos e circunscritos a uma circunferência pode-se concluir que a área do polígono de n lados e perímetro fixo converge para a área de um círculo de mesmo perímetro [2]. (A dedução de Arquimedes para a área do círculo usa esta aproximação)

Isto significa ainda que o limite da seqüência $n \tan\left(\frac{\pi\, rad}{n}\right)$ é o número que foi denominado como π que é também a divisão do comprimento de qualquer circunferência por seu diâmetro. Temos portanto que a sequência (A_n) converge para $\frac{p^2}{\pi}$.

A prova de que para um perímetro fixo, a circunferência é, de fato, a única curva que contorna a maior área possível é estabelecida no clássico teorema da desigualdade isoperimétrica:

---

[2] O radiano é uma medida de ângulo definida por: 1rd=$(180/\pi)^o$. Em textos atuais de matemática quando não se especifica em que unidade está sendo medido o ângulo, assume-se que esta é o radiano.

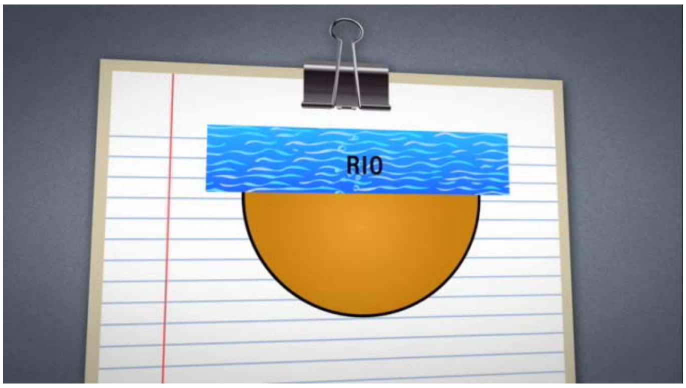
[3] Uma forma de provar este fato é usando cálculo diferencial. Mostra-se inicialmente que a função *tan(y)/y* é crescente. Assim, para $y=\pi/n$, quanto maior o valor de n, menor é o valor da função que está no denominador da expressão de A_n.

Teorema (desigualdade isoperimétrica)

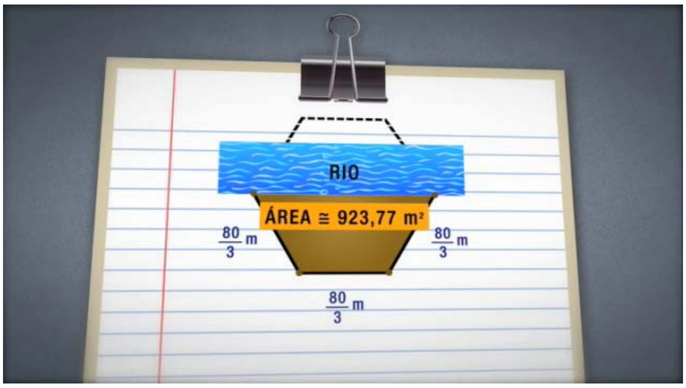
Toda curva fechada de comprimento l cerca uma área menor ou igual a $\frac{l^2}{4\pi}$, e este valor só é atingido se a curva em questão for um círculo de raio $\frac{l}{2\pi}$.

Há diversas demonstrações desta desigualdade, utilizando geometria plana ou mesmo cálculo diferencial. Uma referência é o artigo [2].

No programa, entretanto, o problema isoperimétrico é abordado com algumas restrições. A primeira delas é construir um cercado com maior área possível, tendo um dos lados definidos, a saber, a margem de um rio. Neste caso, a demonstração do resultado é feita por absurdo, utilizando o teorema acima. Como na margem do rio não será utilizada nenhuma cerca, a solução para este problema isoperimétrico tem que ser um semi-círculo. De fato, se a solução fosse uma outra curva C, ao considerarmos a curva fechada onde adicionamos à curva C a reflexão dela através da reta associada à margem do rio, obteríamos uma solução que não o círculo para a curva fechada de maior área e perímetro igual ao dobro do comprimento da curva C.



A outra restrição diz respeito ao uso de mourões para a construção das cercas. No programa a restrição é de quatro mourões, e neste caso, um argumento semelhante ao utilizado acima mostra que a solução do problema isoperimétrico é a metade de um hexágono regular. Uma tentativa de solução, que é a metade de um quadrado é explorada no vídeo, contrastando com a solução de fato, que é a metade de um hexágono regular.



No caso geral, que pode ser discutido com os alunos, a solução para o uso de *n* mourões será a metade do polígono de *2.(n-1)* lados.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Solicitar aos alunos que calculem a área de diversos polígonos de mesmo perímetro, para que verifiquem que figuras com mesmo perímetro podem ter áreas diferentes. Por exemplo, dado um perímetro de 120 cm, calcular as áreas de retângulos diversos, quadrado, triângulos, inclusive o eqüilátero e hexágono regular.

Depois da execução

Sugestão de atividades para os alunos

Polígonos não convexos

A partir de um polígono não convexo fornecido, o professor pode solicitar aos alunos que encontrem um polígono convexo com maior área. Se os alunos apresentarem como resultado um polígono convexo de mesmo número de lados, propor então que eles encontrem um com menor número de lados, maior área e menor perímetro.

Retângulos de mesmo perímetro

Propor que os alunos demonstrem que de todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o que possui maior área.

Fórmula da área de um polígono regular de n lados

Deduzir, a partir da decomposição em triângulos e expressões trigonométricas, a fórmula para o cálculo da área $A_n = \dfrac{p^2}{n \tan\left(\frac{180^o}{n}\right)}$ de um polígono regular de n lados e semi-perímetro p.

Construção de Gráfico

O professor pode solicitar aos alunos que calculem o valor das áreas de diversos polígonos regulares de mesmo perímetro, com o uso de uma calculadora científica ou programas computacionais, e depois façam a representação gráfica dos valores. Após a apresentação dos gráficos o professor pode explorar a idéia de limite, mostrando que a sequência dos valores das áreas converge para a área do círculo de mesmo perímetro.

Problemas semelhantes

Solicitar aos alunos que resolvam problemas semelhantes ao apresentado no programa, alterando o número de mourões, ou ainda colocando outras restrições.

Referências Bibliográficas e Sugestões de leitura

[1] G.R. Cavalcanti, *Problemas Variacionais Geométricos*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

[2] C.G.T.A. Moreira, N. C. Saldanha, *A desigualdade Isoperimétrica* , Matemática Universitária, n° 15, 13-19, 1993.

[3] A. L. Pereira; C. Possani, *Qual é o maior terreno que sua cerca pode delimitar?* Revista do Professor de Matemática. São Paulo, n. 54, p. 24-33, 2004.
[4] C.R.A. Souza, *Duas Demonstrações da Desigualdade Isoperimétrica*, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

Ficha técnica

Autores do Guia: *Sueli Costa e Roberto Limberger*
Revisão do Guia: *Claudina Izepe Rodrigues*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*