Números
e funções

Guia do Professor

Vídeo

Huguinho e Zezinho

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Explicitar como são calculados os juros compostos

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância
Ministério da Ciência e Tecnologia
Ministério da Educação
Governo Federal

Huguinho e Zezinho

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Matemática financeira; juros compostos

Duração
Aprox. 12 minutos.

Objetivos
1. Explicitar como são calculados os juros compostos

Sinopse
Dois irmãos vão ao banco com intuitos diferentes – um para investir; o outro para fazer um empréstimo. Como os juros compostos são usados em cada um dos casos?

Material relacionado
Áudios: *O que é exponencial?*
Vídeos: *Juros divididos, dívida crescente, Desejos, Direitos do consumidor, A mãe;*
Software: *Como comprar a moto?*
Experimento: *Eliminando quadrados*.

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

No vídeo, Huguinho tem mil reais para investir e ele vai a um banco. Ele gostaria de saber quanto iria ganhar deixando o dinheiro aplicado por seis meses. Sua gerente explica então que juro é a remuneração paga pelo empréstimo de dinheiro. A gerente diz que o valor exato do rendimento é impossível saber porque os juros são fixados a cada mês. Daí ela mostra como o rendimento da poupança evoluiu nos meses anteriores.

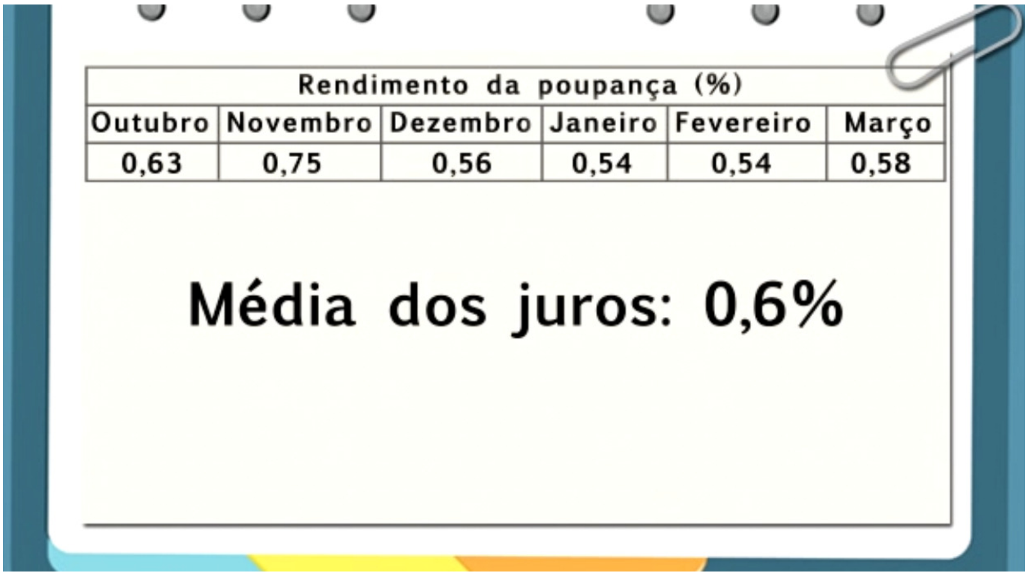


Figura 1. Evolução do rendimento da poupança

Ela explica que em todas as aplicações, o cálculo dos rendimentos é feito por **juros compostos**. Juro composto ocorre quando o juro gerado pela aplicação é incorporado ao capital investido e passa a participar da geração de juros no período seguinte.

No exemplo dado pela gerente, ela mostra que o cálculo do rendimento em um determinado mês é feito sobre o valor total, valor este que incorpora também os rendimentos do mês anterior.

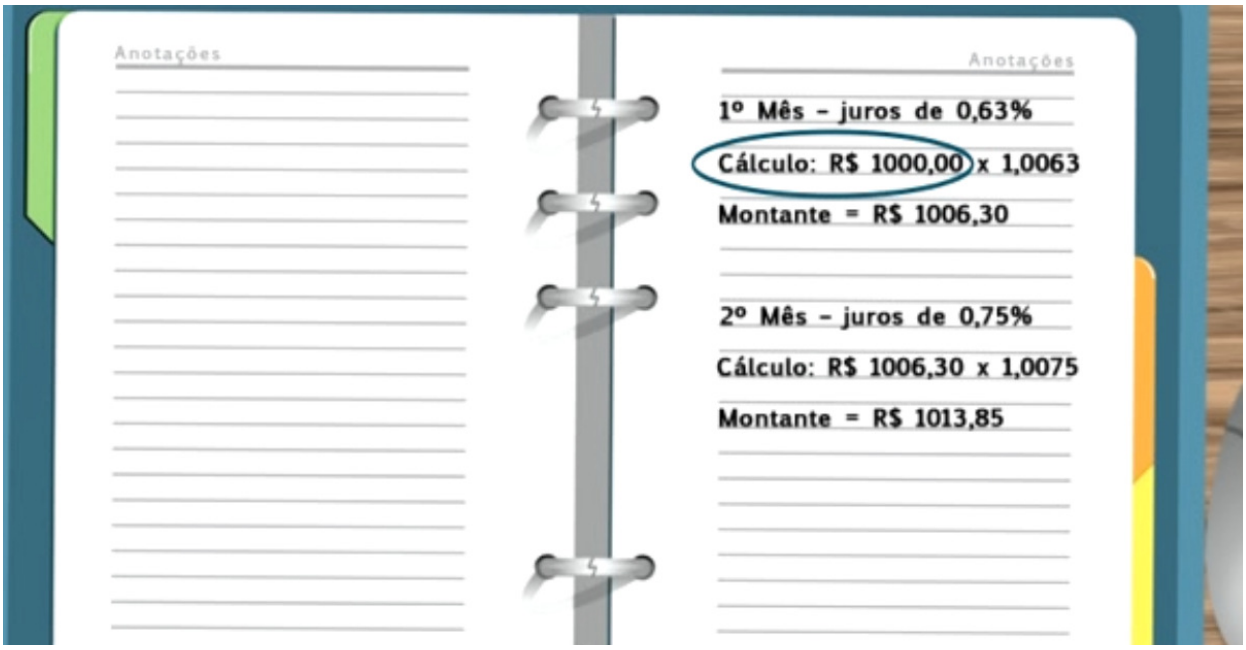
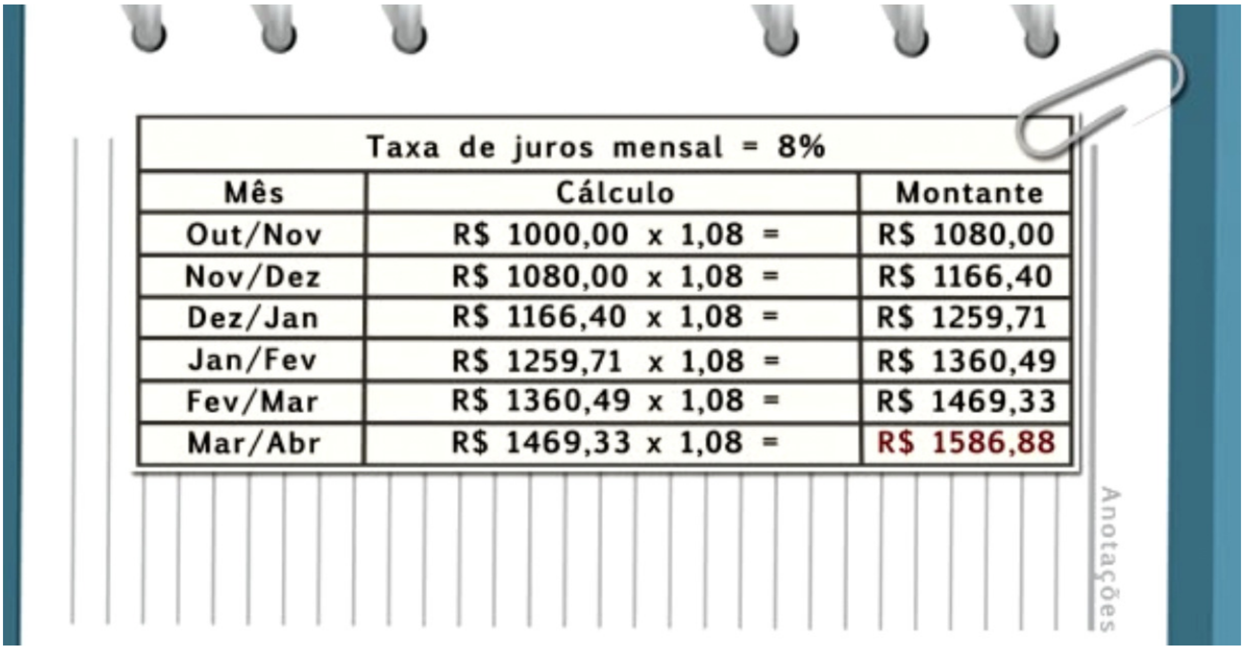


Figura 2. Exemplo do cálculo de juros compostos

Zezinho, diferentemente de seu irmão, foi à mesma gerente para fazer um empréstimo de mil reais. Ela o diz que a taxa de juros ao mês é pré-fixada em 8%.

Após o período de empréstimo, Zezinho retorna para pagar sua dívida. Ela mostra a ele como ficou sua dívida após esse período.

Zezinho constata, para sua surpresa, que o valor da dívida ficou muito grande.



Taxa de juros mensal = 8%		
Mês	Cálculo	Montante
Out/Nov	R$ 1000,00 x 1,08 =	R$ 1080,00
Nov/Dez	R$ 1080,00 x 1,08 =	R$ 1166,40
Dez/Jan	R$ 1166,40 x 1,08 =	R$ 1259,71
Jan/Fev	R$ 1259,71 x 1,08 =	R$ 1360,49
Fev/Mar	R$ 1360,49 x 1,08 =	R$ 1469,33
Mar/Abr	R$ 1469,33 x 1,08 =	R$ 1586,88

Figura 3. Tabela da dívida de Zezinho

Huguinho sugere ao irmão resgatar o investimento feito para cobrir a dívida, mas ele percebe que isso não será possível, essencialmente porque a taxa de juros paga pelo banco (0,6% ao mês na média) fica muito abaixo da taxa de juros cobrada pelo banco (8% ao mês).

Pode-se perceber facilmente que a sequência dos montantes (M_1, M_2, etc.) produzidos pelo capital inicial (***C***) a cada mês constitui uma P.G. Assim, ao final de ***n*** períodos, o montante pode ser calculado através da fórmula seguinte:

$$\boxed{M_n = C.(1+i)^n},$$

sendo ***i*** a taxa de juros a cada período e ***n*** a quantidade de períodos.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Sugerimos a revisão dos principais conceitos de matemática financeira. Enfatizando que a matemática financeira tem por função estudar as várias formas de evolução do valor do dinheiro no tempo. A partir dela podemos gerar análise e comparações que nos permitam definir as melhores alternativas para a aplicação ou obtenção de recursos financeiros. Vários termos são utilizados quando trabalhamos nesta área. Os principais deles são:

Capital: Capital ou principal é o valor monetário disponível em um momento.

Juros: É o preço do dinheiro. Ao se tomar certa quantia emprestada por um determinado período de tempo, o juro seria o valor do aluguel a ser pago por este empréstimo.

Taxa de juros: É o valor percentual que será aplicado sobre a quantia devida, para a apuração dos juros.

Período: É o período de tempo da aplicação.

Montante: Montante ou capital final é a soma do principal com os juros resultantes da operação.

Depois da execução

Após a execução do vídeo, o professor poderia iniciar o estudo de juros compostos, dando ênfase a situações-problemas que envolvam esse conceito.

Problema 1: Aplicando-se R$ 15.000,00 a uma taxa de juro composto de 1,7% a.m., quanto receberei de volta após um ano de aplicação? Qual o juro efetivo obtido neste período?

Solução

Primeiramente vamos identificar cada uma das variáveis fornecidas pelo enunciado do problema:

$$\begin{cases} C\text{: } R\$\ 15.000{,}00 \\ i\text{: } 1{,}7\%\ a.m.\ \Rightarrow\ \frac{1{,}7}{100}\ a.m.\ \Rightarrow\ 0{,}017\ a.m. \\ n\text{: } 1\ ano\ \Rightarrow\ 12\ meses \end{cases}$$

Como a taxa de juros está em meses, também iremos trabalhar com o período de tempo em meses e não em anos como está no enunciado do problema.

Pelo enunciado identificamos que foram solicitados o montante e o juro, utilizaremos, portanto a fórmula abaixo que nos dá o montante:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Ao substituirmos cada uma das variáveis pelo seu respectivo valor teremos:

$$M = 15000 \cdot (1 + 0{,}017)^{12}$$

Podemos então realizar os cálculos para encontramos o valor do montante:

$$M = 15000 \cdot (1 + 0{,}017)^{12} \Rightarrow$$

$$M = 15000 \cdot 1{,}017^{12} \Rightarrow$$

$$M = 15000 \cdot 1{,}224197 \Rightarrow$$

$$M = 18362{,}96$$

Logo o montante a receber será de R$ 18.362,96. Sabemos que a diferença entre o montante e o capital aplicado nos dará os juros do período. Temos então:

$$j = M - C \Rightarrow$$

$$j = 18362{,}96 - 15000 \Rightarrow$$

$$j = 3362{,}96$$

Portanto:

Após um ano de aplicação receberei de volta um total de R$ 18.362,96, dos quais R$ 3.362,96 serão recebidos a título de juros.

Problema 2: Paguei de juros um total R$ 2.447,22 por um empréstimo de 8 meses a uma taxa de juro composto de 1,4% a.m. Qual foi o capital tomado emprestado?

Solução

Em primeiro lugar vamos identificar as variáveis fornecidas pelo enunciado:

$$\begin{cases} j: \ R\$ \ 2.447,22 \\ n: \ 8 \ meses \\ i: \ 1,4\% \ a.m. \ \Rightarrow \ \frac{1,4}{100} \ a.m. \ \Rightarrow \ 0,014 \ a.m. \end{cases}$$

Como sabemos a fórmula básica para o cálculo do juro composto é:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Mas como estamos interessados em calcular o **capital**, é melhor que isolemos a variável **C** como a seguir:

$$M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow$$

$$C = \frac{M}{(1 + i)^n}$$

Note que a variável **M** não consta no enunciado, mas ao invés disto temos a variável **j**, no entanto sabemos que o valor do montante é igual à soma do valor principal com o juro do período, então temos:

$$M = C + j$$

Podemos então substituir **M** por **C + j** na expressão anterior:

$$C = \frac{C + j}{(1 + i)^n}$$

Vamos então novamente isolar a variável **C**:

$$C = \frac{C + j}{(1 + i)^n} \Rightarrow$$

$$C \cdot (1 + i)^n = C + j \Rightarrow$$

$$C \cdot (1 + i)^n - C = j \Rightarrow$$

$$C \cdot \left((1 + i)^n - 1\right) = j \Rightarrow$$

$$C = \frac{j}{(1 + i)^n - 1}$$

Finalmente podemos substituir as variáveis da fórmula pelos valores obtidos do enunciado:

$$C = \frac{j}{(1 + i)^n - 1} \Rightarrow$$

$$C = \frac{2447{,}22}{(1 + 0{,}014)^8 - 1} \Rightarrow$$

$$C = \frac{2447{,}22}{1{,}014^8 - 1} \Rightarrow$$

$$C = \frac{2447{,}22}{1{,}117644 - 1} \Rightarrow$$

$$C = \frac{2447{,}22}{0{,}117644} \Rightarrow$$

$$C = 20801{,}91$$

Logo:

O capital tomado emprestado foi de R$ 20.801,91.

Problema 3: Planejo emprestar R$ 18.000,00 por um período de 18 meses ao final do qual pretendo receber de volta um total de R$ 26.866,57. Qual deve ser o percentual da taxa de juro composto para que eu venha a conseguir este montante?

Solução

Do enunciado identificamos as seguintes variáveis:

$$\begin{cases} C: \ R\$ \ 18.000{,}00 \\ n: \ 18 \ meses \\ M: \ R\$ \ 26.866{,}57 \end{cases}$$

A partir da fórmula básica para o cálculo do juro composto iremos isolar a variável **i**, que se refere à taxa de juros que estamos em busca:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Esta variável pode ser isolada com os seguintes passos:

$$M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow$$

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{\frac{M}{C}} = \sqrt[n]{(1 + i)^n} \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{\frac{M}{C}} = 1 + i \Rightarrow$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1$$

Por fim substituiremos as variáveis da fórmula pelos valores obtidos do enunciado:

$$i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1 \Rightarrow$$

$$i = \sqrt[18]{\frac{26866{,}57}{18000}} - 1 \Rightarrow$$

$$i = \sqrt[18]{\frac{26866{,}57}{18000}} - 1 \Rightarrow$$

$$i = \sqrt[18]{1{,}492587} - 1 \Rightarrow$$

$$i = 1{,}0225 - 1 \Rightarrow$$

$$i = 0{,}0225$$

O valor decimal **0,0225** corresponde ao valor percentual de **2,25%.**

Logo:

Para que eu venha obter o montante desejado, é preciso que a taxa de juro composto seja de 2,25% a.m.

Problema 4: Preciso aplicar R$ 100.000,00 por um período de quantos meses, a uma taxa de juro composto de 1,7% a.m., para que ao final da aplicação eu obtenha o dobro deste capital?

Solução

Do enunciado identificamos as seguintes variáveis:

$$\begin{cases} C: \ R\$ \ 100.000{,}00 \\ i: \ 1{,}7\% \ a.m. \ \Rightarrow \ \frac{1{,}7}{100} \ a.m. \ \Rightarrow \ 0{,}017 \ a.m. \\ M: \ R\$ \ 200.000{,}00 \end{cases}$$

Tendo por base a fórmula básica para o cálculo do juro composto isolemos a variável **n**, que se refere ao período de tempo que estamos a procura:

$$M = C \cdot (1 + i)^n \ \Rightarrow$$

$$(1 + i)^n = \frac{M}{C} \ \Rightarrow$$

$$\log(1 + i)^n = \log\left(\frac{M}{C}\right) \ \Rightarrow$$

$$n \cdot \log(1 + i) = \log\left(\frac{M}{C}\right) \ \Rightarrow$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1 + i)}$$

Substituindo o valor das variáveis na fórmula:

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1 + i)} \ \Rightarrow$$

$$n = \frac{\log(2)}{\log(1{,}017)} \ \Rightarrow$$

$$n = \frac{0{,}301030}{0{,}007321} \ \Rightarrow$$

$$n = 41{,}12$$

Assim sendo:

Para que eu consiga dobrar o valor do meu capital precisarei de mais de 41 meses de aplicação.

Sugestões de leitura

SAMANEZ, Carlos Patrício. (2006) *Matemática Financeira: aplicações à análise de investimentos*. 4a ed. São Paulo: Prentice-Hall.

ASSAF NETO, Alexandre. (2009) *Matemática Financeira e suas aplicações*. 11a ed. São Paulo: Atlas.

CRESPO, Antônio Arnot. (2009) *Matemática Financeira Fácil*. 14a ed. São Paulo: Saraiva.

Ficha técnica

Autor *Luiz Antonio Mesquiari*
Revisor *José Plínio de Oliveira Santos*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*