



Matemática
Multimídia

Números
e funções



Guia do Professor



Vídeo

Hotel de Hilbert

Série Matemática na Escola


Objetivos

1. Introduzir o conceito matemático de infinito.



UNICAMP

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 

Hotel de Hilbert

Série

Matemática na Escola

Conteúdos

Conceito de infinitos, injetividade de funções e cardinalidade.

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivos

1. Introduzir o conceito matemático de infinito.

Sinopse

O gerente de um hotel com infinitos quartos lida com o problema de acomodar novos hóspedes quando o hotel já tem infinitos hóspedes.

Material relacionado

Áudios: *Infinito 1*, *Infinito 2*;
Softwares: *Algum software*;
Vídeos: *Grande hotel*.

Introdução

Sobre a série

A série *Matemática na Escola* aborda o conteúdo de matemática do Ensino Médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático; além disso, pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa mostra o gerente do Hotel Hilbert, que possui infinitos quartos, tratando o problema de acomodar novos hóspedes quando o hotel já tem infinitos hóspedes. Cada hóspede em um quarto.

Observe que o gerente fala que o hotel está lotado, no sentido de que há infinitos hóspedes, mas não no sentido de que não caiba mais hóspedes.

Num primeiro momento, ele gera mais uma vaga deslocando cada hóspede de seu quarto atual para o seguinte. Quando um ônibus com infinitos passageiros procura o hotel, o gerente realoca novamente seus hóspedes, mas desta vez cada hospede vai para um quarto cujo número é o dobro do número do seu quarto atual. Agora, todos os quartos de número ímpar estão vagos, portanto o Hotel Hilbert dispõe de infinitas vagas e pode hospedar todos os passageiros do ônibus.

Então, um desafio ainda maior se apresenta ao gerente do Hotel Hilbert: acomodar os passageiros de uma excursão com infinitos ônibus cada um com infinitos passageiros. O gerente resolve este problema realocando seus hóspedes - desta vez, um hóspede que esteja no quarto n deverá se mudar para o quarto 2^n . O gerente dispõe



de infinitas vagas novamente. Depois, o gerente associa a cada ônibus um número primo diferente de dois. Então, ele acomoda os passageiros segundo a seguinte regra: o passageiro que está na cadeira n do ônibus p ocupará o quarto de número p^n .

Sugestões de atividades

Antes da execução

Observe que é impossível tampar 20 canetas com 15 tampas, estacionar 7 carros em 5 vagas etc. Mostre que matematicamente isso significa que não existe função bijetora de um conjunto finito em um subconjunto próprio. O argumento desta demonstração é bastante intuitivo e o exemplo das canetas e tampas dá uma boa noção do porquê desta impossibilidade; porém, caso o professor queira apresentar uma prova formal, ela pode ser feita como apresentado abaixo:

Suponha que $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+k}\}$ é um conjunto com $n+k$, $n > 0$ e $k > 0$, elementos; $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ é um subconjunto de A ; e B possui n elementos. Suponha que $f: A \rightarrow B$ é uma função bijetora. Suponha também, após reordenar convenientemente o conjunto, os elementos de B tais que

$$f(a_1) = b_1,$$

$$f(a_2) = b_2,$$

...

$$f(a_n) = b_n.$$

Então, $f(a_{n+1}) = b_i = f(a_i)$, para algum $i < n+1$. Isso contradiz o fato de f ser injetiva. Logo, não pode existir uma tal função f . \square



Apresentar a definição de conjunto infinito: um conjunto é infinito se existe uma função injetora dele em um subconjunto próprio.

Durante a execução

Se julgar conveniente formalizar melhor o procedimento apresentado no vídeo, observe que:

Aos 7:45 min: cada passageiro está associado a um par ordenado (nº do ônibus, nº da cadeira) do conjunto $P \subset \mathbb{N}$, onde P é o conjunto dos números primos e \mathbb{N} é o conjunto dos números naturais.

Aos 8:27 min: o que foi demonstrado por contradição é que a função:

$$F: P \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(n^\circ \text{ do } \text{ônibus}, n^\circ \text{ da cadeira}) \rightarrow (n^\circ \text{ do } \text{ônibus})^{(n^\circ \text{ da cadeira})}$$

é injetiva.

Depois da execução

O professor deve alertar que o infinito não é um número e que não podemos, por exemplo, realizar operações, como multiplicação e soma, envolvendo infinito. Além disso, os seguintes tópicos podem ser apresentados.

O conjunto dos números naturais é infinito

Seja C o conjunto dos números pares positivos e \mathbb{N} o conjunto dos números naturais. Claramente, o conjunto dos números pares é um subconjunto próprio de \mathbb{N} . Defina:

$$g: \mathbb{N} \rightarrow C$$

$$n \rightarrow 2n.$$

É fácil provar que g é injetora, logo \mathbb{N} é infinito.

Um conjunto “maior” que o dos números Naturais

Para comparar a “quantidade” de elementos de dois conjuntos infinitos, devemos verificar se existe alguma função bijetora entre eles. Caso exista, dizemos que estes conjuntos têm a mesma cardinalidade.

Até agora, o conjunto \mathbb{N} dos números naturais foi o único que abordamos, porém existem outros conjuntos infinitos que conhecemos, como o conjunto \mathbb{R} , dos números reais, e que diferem significativamente do conjunto dos números naturais. De fato, o conjunto dos números reais possui uma cardinalidade maior do que a dos números naturais e, portanto é “maior” do que ele.

Sugestões de leitura

Elon Lages Lima. Análise Real, vol.1.

Ficha técnica

Autor *Alison Marcelo Van Der Laan Melo*

Revisor *Samuel Rocha de Oliveira*

Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*

Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas

Reitor *Fernando Ferreira Costa*

Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*

Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diretor *Jayme Vaz Jr.*

Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*