Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

A História de Mussaraf

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Conhecer e apresentar diferentes situações problemas que envolvam proporções.
2. Mostrar algumas propriedades de frações.
3. Aplicar os conhecimentos sobre frações para resolver situações problemas que possam aparecer no cotidiano.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância · Ministério da Ciência e Tecnologia · Ministério da Educação · Governo Federal

A história de Mussaraf

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Razão e Proporção; Frações

Duração
Aprox. 11 minutos.

Objetivos
1. Conhecer e apresentar diferentes situações problemas que envolvam proporções.
2. Mostrar algumas propriedades de frações.
3. Aplicar os conhecimentos sobre frações para resolver situações problemas.

Sinopse
Mussaraf é um arquiteto do reino Persa que busca inspirações em suas viagens, e numa dessas aventuras conhece Abdul, herdeiro de um rico comerciante, mas que precisa da ajuda dele para resolver alguns problemas que envolvem a fortuna herdada e a futura esposa, que foi encantada por um gênio maldoso.

Material relacionado
Áudios: *A herança de camelos;*

Introdução

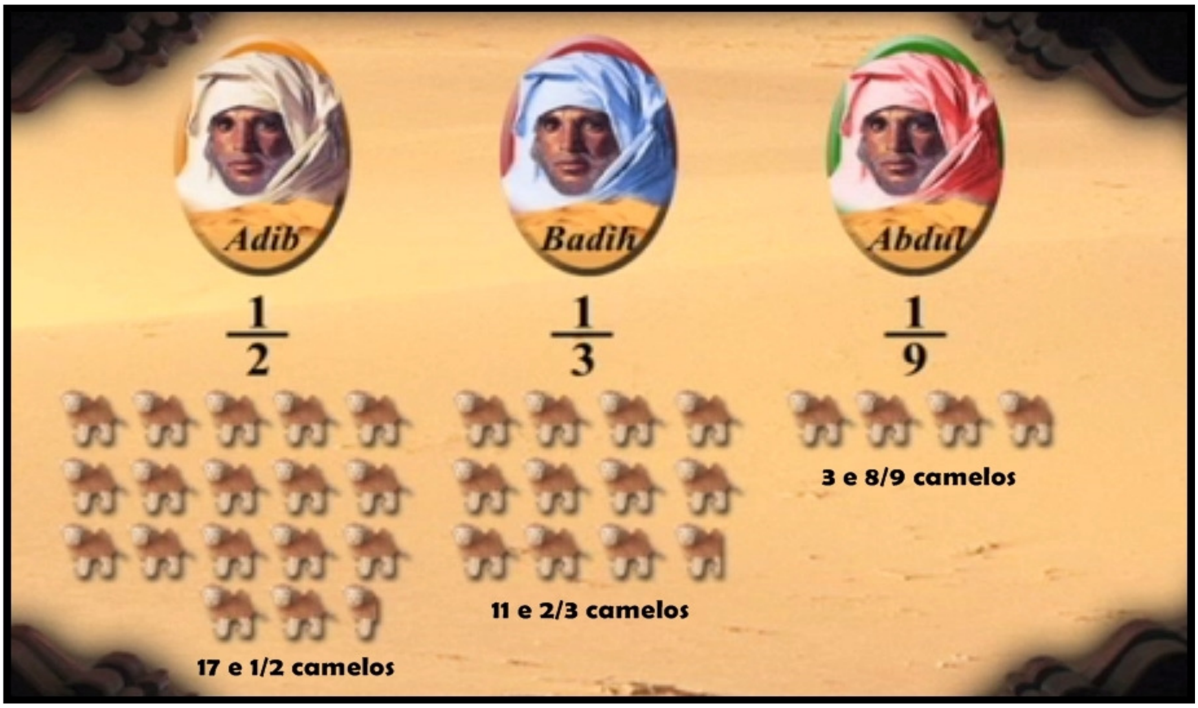
Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa, uma versão das histórias de Malba Tahan, aborda três situações problemas envolvendo proporções.

Mussaraf, um arquiteto do reino Persa, em uma de suas viagens encontra Abduh, herdeiro caçula de um rico comerciante, que precisa de ajuda para resolver alguns problemas relacionados às frações.



O pai de Abdul deixou 35 camelos para serem divididos entre os três irmãos, sendo que o mais velho Adib receberá ½ (a metade), o filho do meio Badih receberá 1/3 (um terço) e Abdul, o filho caçula receberá 1/9 (um nono) dos camelos.

Nessa situação problema, quando divididos os camelos, conforme as regra aparecem os seguintes resultados:

Aqui aparecem os números mistos, por exemplo, 17 1/2, 11 2/3 e 3 8/9. Observando a situação, o grande problema se trata em como resolver essa conta sem que nenhum camelo seja sacrificado e suas partes divididas. Para resolver essa situação problema primeiro deve-se calcular o denominador comum entre as frações, que é 18. Assim o total de camelos divididos será 17/18 de 35. Nota-se que esta conta não é exata, faltando 1/18 para completar Mussaraf então, dá seu camelo para Abdul totalizando 36 camelos, feito isso se resolve o problema:

$$\frac{1}{2} \times 36 = 18 \qquad \frac{1}{3} \times 36 = 12 \qquad \frac{1}{9} \times 36 = 4$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18} \rightarrow \frac{17}{18} \times 36 = 34$$

Ainda sobram 2 camelos (36-34), Abdul devolve o camelo de Mussaraf e como gratificação dá-lhe o camelo restante.

Analisando a situação, observa-se que 35 não é múltiplo de 2 nem de 3 e nem de 9, assim a divisão dos camelos nunca seria exata.

Com um camelo a mais temos o desfecho da história:

Disse ao mais velho: você deveria receber metade de 35 que seria 17 mais ½ camelo agora irá receber metade de 36 que são 18 camelos. Desta maneira você está ganhando ½ camelo. Ao segundo filho que ficaria com um terço de 35, i. é, 11 mais 2/3, caberia agora um terço de 36 que é igual a 12. Um ganho de 1/3 de um camelo, Ao mais jovem que inicialmente receberia 3 camelos e 8/9 agora passaria a ter exatos 4 camelos com um ganho de 1/9 de um camelo. Com esta nova divisão todos concordaram por verem ganhos na partilha.

Algo curioso ocorre nesta divisão feita pelo hábil calculista. Um meio de 36, que é 18, mais um terço de 36, que é 12, mais um nono de 36, que é 4, totaliza 34. Desta forma ele pode satisfazer os 3 irmãos, devolver o camelo ganho e ainda doar um camelo "extra".

Tentaremos explicar que não foi feita nenhuma mágica pelo esperto calculista. O Pai, ao deixar metade ao mais velho, um terço para o do meio e um nono para o mais jovem distribuiu apenas (1/2 + 1/3 + 1/9) de sua herança. A soma destas frações não é igual a "um" mas sim igual a 17/18 que é menor do que 1. Logo ele não atribuiu a ninguém uma fração igual a 1/18 dos 35. Veja que 35/18 é igual a 1+17/18 e foi esta a parte, que o Pai não deixou para ninguém, que é redistribuída doando um camelo e repartindo os 17/18 entre os três, dando mais ½ ao mais velho, mais 1/3 ao do meio e mais 1/9 ao mais jovem.

Algo que pode ajudar a esclarecer isto, e que ficou implícito acima, é que 17/18 avos de 35 não é um inteiro e 17/18 avos de 36 é exatamente 34.

Sugerimos que se tente aplicar a mesma divisão para um total de 17 camelos e, também, para 53 camelos.

Aqui o professor poderá trabalhar além das propriedades de frações, como a soma, como também com a questão de múltiplos, relembrando MMC e MDC.

O programa apresenta mais duas situações de proporcionalidade.

A noiva de Abdul foi transformada em uma pomba por um gênio maldoso por não saber responder a duas questões de matemática:

O tanque em que ela foi se refrescar tinha duas torneiras uma verde e uma vermelha, a torneira verde enchia o tanque em 30 minutos e a torneira vermelha enchia em 45 minutos. Quanto tempo é necessário para encher o tanque se as duas torneiras ficarem abertas? E sabendo que o tanque demorava 90 minutos para esvaziar, em quanto tempo somente a torneira verde aberta enchia com o ralo destampado?

torneira verde = 1/30

torneira vermelha = 1/45

Para resolver a primeira parte, pensando somente na torneira verde o tanque é dividido em 30 partes iguais assim, 1/30 é a fração do tanque que é cheia em 1 minuto. O tanque vermelho é dividido em 45 partes assim a fração que é cheia em 1 minuto será 1/45, e como as duas torneiras ficam abertas, então a fração do tanque que é cheia em 1 minuto será de: $1/30 + 1/45 = 1/18$, utilizando uma regra de três simples obtêm 18 minutos para o tanque ser cheio com as duas torneiras abertas. Na segunda parte do problema calcula-se a diferença entre a fração do volume fornecido em 1 minuto e a fração do volume perdido nesse mesmo tempo, assim: $1/30 - 1/90 = 1/45$, novamente usando uma regra de três simples chega-se a conclusão que o tanque demora 45 minutos para encher com o ralo aberto e somente a torneira verde funcionando.

Problemas matemáticos com enunciados da mesma natureza do problema acima podem ser traduzidos por frações (razão) envolvendo duas variáveis. Pelo problema já indicado defini-se a razão volume pelo tempo, pois está bem caracterizado no enunciado do problema.

Isto é, a razão do volume que se preenche pelo tempo que se leva, em cada uma das torneiras, ou a razão do volume que esvazia pelo tempo que se leva para esvaziar.

Assim a noiva de Abdul se libertou do encantamento do gênio malvado, e eles nunca mais erraram as contas com fração.

Sugestões de atividades

Antes da execução

O conteúdo deste programa é elementar e pode ser utilizado para revisão de frações, números racionais e suas propriedades. Reproduzimos aqui uma breve revisão do conjunto dos números racionais (texto adaptado de Otilia Paques (2011)).

Números Racionais
Chamamos de fração a todo elemento *a/b*, em que *a* pode ser um número inteiro qualquer e *b* pode ser um número inteiro diferente do zero.

O número *a* é chamado de *numerador* e o *b* de *denominador* da fração

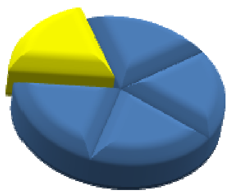
$$\frac{a}{b}.$$

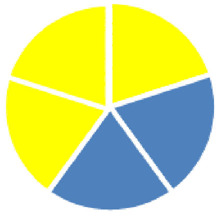
As frações podem ser entendidas como: Uma medida da relação parte-todo; Um quociente; Uma razão; Uma operação. Vamos dar alguns detalhes de cada caso.

A relação parte-todo e a medida
Esta situação se apresenta quando um "todo" é dividido em partes. A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o número total de partes. O todo recebe o nome de "unidade".

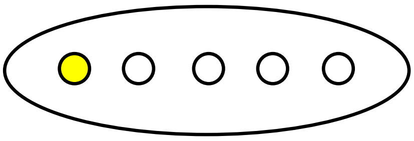
Exemplos:

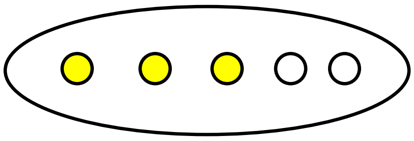
Representação de frações no contexto contínuo. 1/5 (um quinto) e 3/5 (três quintos):



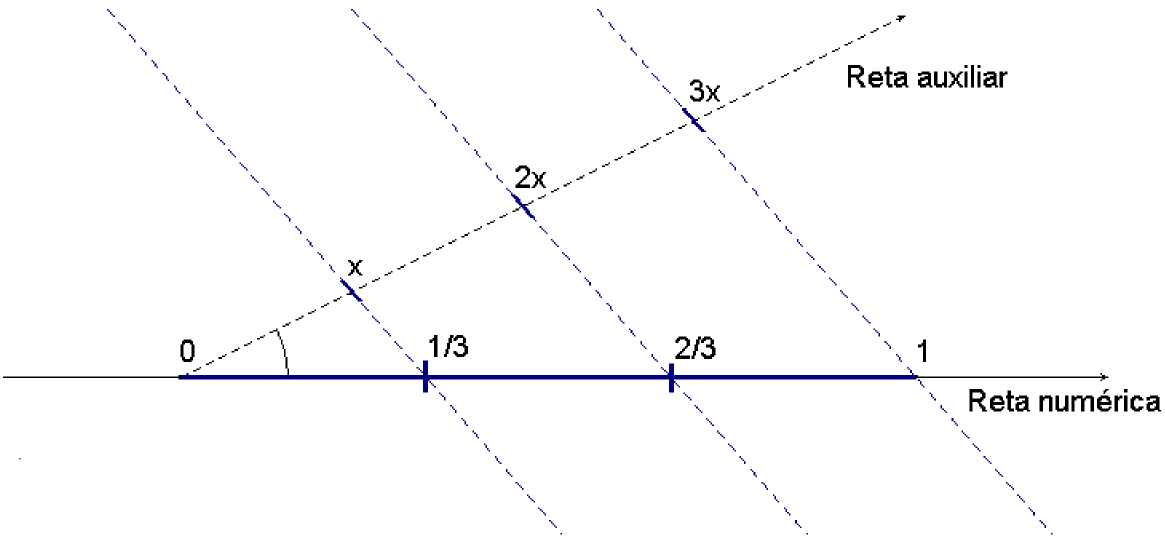


Representação de frações no contexto discreto. 1/5 (um quinto) e 3/5 (três quintos):





Na reta numérica marcamos os valores 1/3 e 2/3 usando o Teorema de Tales, da seguinte forma.



A fração como quociente

Esta interpretação associa à fração, a operação de dividir um número inteiro por outro. Por exemplo, a fração 3/5 é vista com a divisão de três por cinco, estabelecendo uma relação entre 3/5 e 0,6.

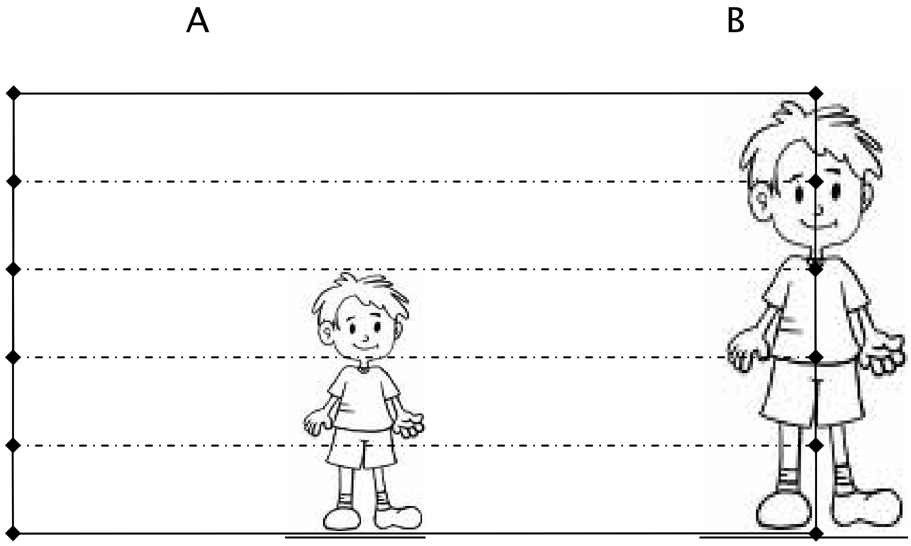
Fração como razão

Será importante diferenciar o conceito de razão do de fração. A fração é uma forma de expressar o quociente de dois números inteiros enquanto que a razão é o resultado do quociente entre dois números. Assim toda fração é também uma razão, mas nem toda razão pode ser expressa como uma fração.

O número π representa a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, mas não é uma fração – π é um número irracional. Outra razão conhecida é a razão áurea, que é a razão entre os lados de um retângulo dito áureo e é dada por

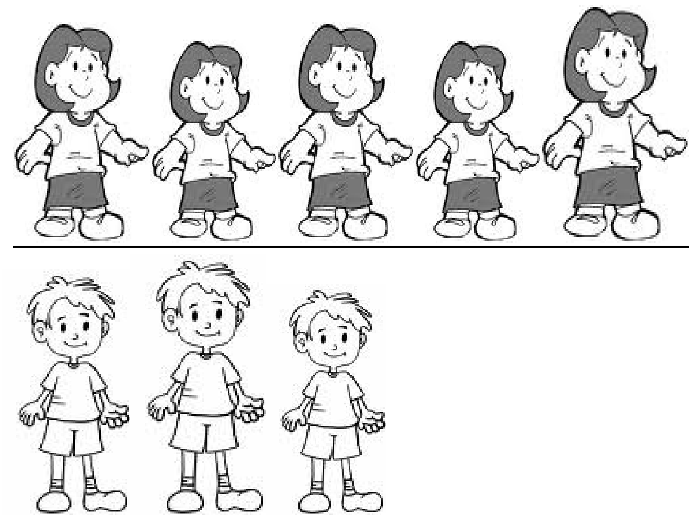
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Um exemplo de razão pode ser obtido da figura abaixo:



A altura do menino A é 3/5 da altura do menino B, e também que, a altura de B é 5/3 de A. Dizemos então que a razão entre a altura de A em relação à de B é 3:5. A razão entre a altura de B em relação a de A é 5:3.

Outro exemplo de razão é a relação de meninos e meninas no grupo:



Podemos dizer que a razão de meninos e meninas é de 3:5 ou 3/5 e que a razão de meninas e meninos no grupo é de 5:3 ou 5/3.

A razão é uma forma de comparação entre os valores de duas grandezas. Por exemplo, a velocidade média, que é dada por distância percorrida (que pode ser medida em quilômetros) pelo tempo (que pode ser medido em horas, como 60 km/h.

Algumas razões recebem um nome específico, como: escalas, renda per capita, velocidade média, densidade etc. Por exemplo, a razão entre o volume e a massa é chamada de densidade e a razão entre a renda total de uma região e o seu número de habitantes é chamada de renda per capita.

Razão de proporcionalidade

Duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

Essa foi a definição dada pelo matemático brasileiro, Antonio Trajano em seu livro “A Aritmética Progressiva”, publicado na primeira edição em 1883.

A palavra grandeza significa aqui uma variável que toma valores em um dado conjunto numérico e que representa quantitativamente o “estado” de algum sistema físico ou ainda de objetos abstratos. Assim, quando dizemos que existe uma proporcionalidade direta entre duas grandezas, a razão entre os valores correspondentes deve ser constante. Esta constante é chamada razão de proporcionalidade. Duas grandezas são inversamente proporcionais quando o produto do valor de uma delas pelo valor correspondente da outra for constante.

Daí segue a famosa “regra de três”, ou seja, se *X* e *Y* são conjuntos que representam os possíveis valores (numéricos) de duas grandezas diretamente proporcionais, então dados

$x_1 \in X, y_1 \in Y$, e $x_2 \in X, y_2 \in Y$, temos $y_1 / x_1 = y_2 / x_2$.

Tal equação resulta da “multiplicação em cruz” dos números que aparecem na forma bem conhecida com que se expressa a proporcionalidade entre as grandezas, i.e.,

$$\begin{cases} x_1 \to y_1 \\ x_2 \to y_2 \end{cases}$$

No caso das grandezas que tomam valores em X e Y serem inversamente proporcionais, representamos tal condição por

$$\begin{cases} x_1 \downarrow y_2 \\ x_2 \downarrow y_1 \end{cases},$$

e "multiplicando em cruz" obtemos $y_1 x_1 = y_2 x_2$.

Exemplo: Considere a tabela abaixo que mostra como os valores de três grandezas $x \in X, y \in Y, z \in Z$ se encontram relacionadas.

x	1	3	4	5	10	20	40	80
y	5	15	20	25	50	100	200	400
z	3000	1000	750	600	300	150	75	37,5

Verificamos que os pares de grandezas *x* e *y* são diretamente proporcionais, e que os pares de grandezas *x* e *z* e também *y* e *z* são inversamente proporcionais. De fato, temos

$$x = \frac{y}{5}, x = \frac{3000}{z}, y = \frac{15000}{z}.$$

A fração como operação

Uma fração pode ser vista como algo que atua sobre uma situação e a modifica. Assim uma fração pode ser interpretada como uma sucessão de multiplicações e divisões, ou vice-versa. Por exemplo, se a situação for um conjunto A, de 12 mapas, o efeito da aplicação 4/6 sobre A, significa dividir por 6 e multiplicar por 4. O estado final será de 8 mapas.

O Conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais e as operações

No estudo das frações temos o conceito de *frações equivalentes* que é o seguinte.

Dadas as frações *m/n* e *p/q*, escrevemos:

$$\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q}$$

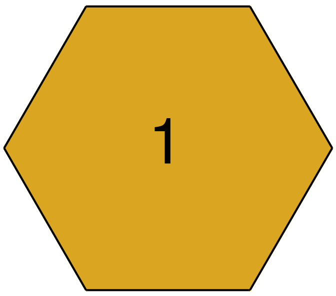
(ou dizemos que elas são equivalentes), se, e somente se $mq = np$.

Para esta relação $\sim$ valem as três propriedades que caracterizam uma relação de equivalência, a saber, as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Esta relação de equivalência determina classes de equivalência no conjunto das frações.

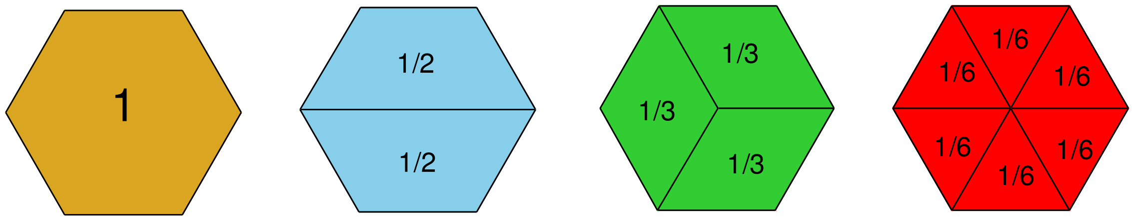
Exemplos: $2 = \{\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \ldots\}$; $\frac{1}{2} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}$, (−2)/(−4), (−1)/(−2) ...},

O conjunto de todas as classes de equivalência determinada por esta relação de equivalência é o conjunto dos números racionais designado por $\mathbb{Q}$. Assim todo elemento *q* de $\mathbb{Q}$ admite infinitas representações *a/b*. Dizemos então que um número racional é o representante de uma classe de frações equivalentes a ele.

As operações fundamentais sobre $\mathbb{Q}$



Considere a figura de um hexágono como sendo um todo, ou seja, equivalente a ao número 1. Uma vez que o hexágono é 1, podemos considerar então que, contidos no hexágono: os trapézios correspondem a 1/2; os losangos correspondem a 1/3; os triângulos correspondem a 1/6.



Definição 1. Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$, dois elementos de $\mathbb{Q}$. Chama-se soma de *a* com *b*, e indicamos isto por *a + b*, ao seguinte elemento de $\mathbb{Q}$: a + b = (m/n) + (p/q) = (mq/nq) + (np/nq) = (mq+np) / nq .

Para esta operação valem as propriedades: associativa, comutativa, elemento neutro e oposto.

Definição 2. Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$, dois elementos de $\mathbb{Q}$. Chama-se produto de *a* com *b*, e indicamos isto por *ab* ou *a.b*, ao seguinte elemento de $\mathbb{Q}$: *a.b = (m/n).(r/s) = mr / ns*.

Valem as propriedades: comutativa, associativa, elemento neutro e a distributiva com relação à soma. Convém ainda destacar a *lei do cancelamento*: Se *a* e *b* estão em $\mathbb{Q}$ e *a.b* = 0, então *a* = 0 ou *b* = 0.

E ainda que para todo *a* em $\mathbb{Q}$, não nulo, $a = \frac{m}{n}$, então o inverso de *a*, com relação ao produto, existe em $\mathbb{Q}$ e é igual a $\frac{n}{m}$. Este número é denotado por a^{-1}, pois $\frac{m}{n} \bullet \frac{n}{m}$ = 1.

Definição 3. Entendemos por divisão em $\mathbb{Q}$, a operação definida por: para *a* e *b* em $\mathbb{Q}$, *b* não nulo, por $a \div b = a \bullet b^{-1}$. Ou seja, se $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$, então:

$$\left(\frac{m}{n}\right) \div \left(\frac{p}{q}\right) = \frac{mq}{np}.$$

Finalmente podemos facilmente mostrar que entre dois racionais a e b, $a < b$ existe um racional c, que é a média aritmética deles,

$$c = \frac{a+b}{2}$$

tais que $a < c < b$. Assim, entre dois racionais existem infinitos racionais.

Durante a execução

O programa trata de três problemas. Assim, se julgar conveniente, o professor pode interromper ao final de cada problema e fazer alguma discussão ou reforçar os valores e depois seguir para os demais problemas apresentados.

Depois da execução

Escolher alguns dos seguintes problemas para serem resolvidos:

1 – Um reservatório é alimentado por duas torneiras. A primeira pode enchê-lo em 15 horas e a segunda, em 12 horas. Que fração do reservatório encherão em uma hora, as duas torneiras juntas?

2 – Uma torneira enche um reservatório em 2 horas e outra em 3 horas. Juntas, em que tempo irão encher o mesmo reservatório?

3 – Uma torneira enche uma cisterna em 1/8 da hora e uma válvula o esvazia em 1/4 da hora. Abertas, em que tempo o reservatório ficará completamente cheio?

4 – Uma torneira enche um depósito d'água em 1/14 da hora enquanto uma válvula pode esvaziá-lo em 1/9 da hora. Trabalhando

juntas, em quanto tempo o líquido contido no depósito atingirá seus 5/6?

5 – Um reservatório é alimentado por duas torneiras. A primeira pode enchê-lo em 15 horas e a segunda, em 10 horas. A primeira é conservada aberta durante 2/3 da hora e a segunda durante 1/2 hora. Que fração do reservatório ficará cheia?

6 – Claudia fez 2/9 de um trabalho em 12 horas e Mariana, 4/7 do resto em 8 horas. Quantas horas levarão para fazer a mesma obra, se trabalharem juntas?

7 – Taninha fez 2/5 de um bordado em 8 horas e Clarisse, 1/3 do resto em 6 horas. Em quanto tempo poderão concluí-lo, se trabalharem juntas?

8 – Vó Marieta é capaz de fazer um bordado em 16 horas e tia Celeste, 5/7 do resto em 15 horas. Em quanto tempo aprontarão o bordado todo, se operarem juntas?

9 – Silvana executa um bordado em nove horas de trabalho e Fernanda, em doze horas. Com auxílio de Eliane, aprontam-no em quatro horas. Calcular o tempo em que Eliane faria o mesmo bordado sozinha.

10 – Alfredo pode pintar uma casa em sete horas de trabalho e seu irmão, em cinco horas. Juntos, que fração do trabalho executarão em uma hora? Em quanto tempo farão toda a pintura da casa?

Sugestões de leitura

TAHAN, MALBA, As maravilhas da Matemática, 2ª Ed. Bloch, Rio de Janeiro, 1973.

PAQUES, OTÍLIA, in CECIM – Curso de Especialização em Ensino de Ciências e Matemática, 2011.

CISCAR, Salvador, GARCIA ,M.Voctoria (coordinatores).Fracciones, la relacion parte-todo.Espanha- Editorial Sintesis, 1997.

DOMINGUES, Hygino H. Fundamentos da aritmética. São Paulo, Atual Editora, 1998.

LIMA, E.L.,CARVALHO,P.C.,WAGNER,E.,MORGADO,A.C.,A Matemática do ensino médio,volume 1. SBM, Rio de Janeiro, 1995.

Ficha técnica

Autoras: *Otília Paques e Thalita Cornélio*
Revisão: *José Plínio de Oliveira Santos*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*