Matemática Multimídia

Geometria e medidas

Guia do Professor

Vídeo

As aventuras do Geodetetive 6: GPS.

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Explicar o funcionamento do GPS
2. Mostrar a matemática envolvida na programação do GPS.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

As aventuras do Geodetetive 6: GPS.

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Geometria da Terra: GPS.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Explicar o funcionamento do GPS;
2. Apresentar a matemática envolvida na programação do GPS.

Sinopse
Arnaldo é um jovem muito curioso e sempre está à procura do saber. À noite mergulha nos livros, assume uma nova identidade, se transforma no Geodetetive e conta com colaboração de seu assistente Sagan em suas investigações. Certa noite, o Geodetetive conversa com o engenheiro agrícola Luis Gustavo que conhece todo o funcionamento de um GPS e a matemática envolvida em sua programação.

Material relacionado
Vídeos: *As aventuras do Geodetetive 1, 2, 3, 4 e 5; A dança do Sol.*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

A série Geodetetive é formada por seis programas com temas sobre a geometria da Terra e alguns fenômenos naturais relacionados.

Arnaldo, o protagonista dos seis programas, é um jovem muito curioso que sempre está à procura do saber. À noite, mergulha nos livros, contempla as estrelas, assume nova identidade se transformando no Geodetetive e conta com a colaboração de seu assistente Sagan em suas investigações.

Certa noite, diante do interesse do Geodetetive em entender como o GPS opera para dar a localização exata de uma pessoa na superfície da Terra, seu colaborador Sagan localiza o engenheiro agrícola Luis Gustavo que conhece todo o funcionamento de um GPS e a matemática envolvida em sua programação.

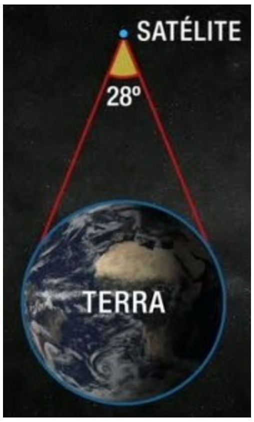
Luis Gustavo conta ao Geodetetive que, além do aparelho GPS do usuário, estações de gerenciamento terrestres e satélites, que orbitam em torno da Terra, fazem parte do sistema. Também, ele explica como conceitos matemáticos são utilizados para determinar a localidade em que o usuário se encontra.

GPS – Global Positioning System

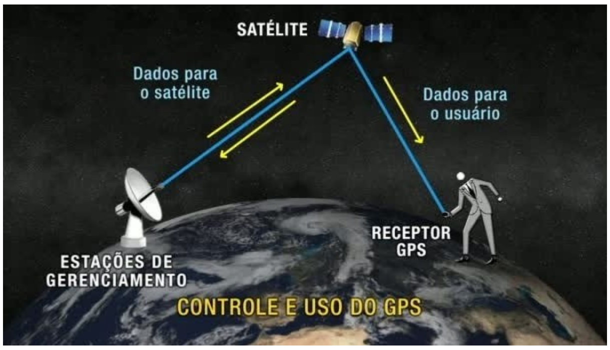
A sigla GPS é a sigla para Global Positioning System (Sistema de Posicionamento Global). Este sistema é formado por cerda de 30 satélites em órbita em torno da Terra, um segmento de controle, que são as estações terrestres de gerenciamento distribuídas pelo globo, sendo uma principal, a MCS – Master Control Station, localizada no Colorado, Estados Unidos, e o receptor do usuário.

Os satélites estão aproximadamente a 20.200 km acima do nível do mar, trafegam em 6 órbitas com pelo menos 4 satélites em cada uma, sendo que cada satélite completa uma volta em torno da Terra em 12h.

O ângulo de visualização da superfície da Terra por um satélite é de aproximadamente 28º e os planos das órbitas são escolhidos de forma que um ponto qualquer da Terra está no ângulo de visualização de pelo menos 4 satélites em qualquer instante, podendo ser visualizado por até mais satélites.

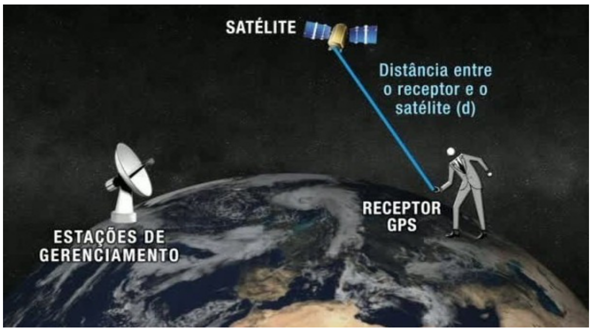


As estações de gerenciamento monitoram os satélites, atualizam as suas posições orbitais e seus relógios a cada momento. Estas informações são enviadas para cada satélite que a transmite ao receptor do usuário na Terra.



Como é determinada a posição do receptor

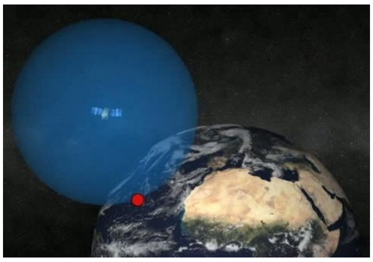
O receptor do usuário recebe um sinal de um dos satélites com informações que permitem que ele determine a diferença (t) entre o instante (tempo) que o sinal é recebido e o instante (tempo) que foi emitido. Sendo o sinal emitido na velocidade da luz ($v \cong 2{,}99792458 \times 10^8 m/s$), a distância (d) entre o receptor e o satélite pode ser obtida pelo produto da velocidade pelo tempo decorrido desde a emissão até a chegada ao receptor, isto é, $d = v.t$.



O receptor recebe sinais de pelo menos 4 satélites (S_1, S_2, S_3, S_4) em posições especiais e, assim, calcula sua distância a cada um destes satélites (d_1, d_2, d_3, d_4). Também, os satélites enviam suas posições (P_1, P_2, P_3, P_4), em um determinado sistema de coordenadas tridimensional, do exato momento em que o sinal é emitido.

Nos itens de a) a e) a seguir estão colocados argumentos de como a posição de cada receptor é perfeitamente determinada.

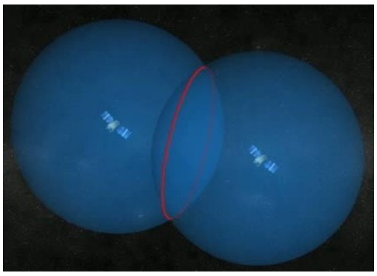
a) Conhecida a distância d_1 do satélite S_1 ao receptor do usuário, a esfera imaginária de centro a posição P_1 deste satélite e raio d_1 contém em sua superfície o ponto P da superfície da Terra que representa a posição do receptor.



De modo análogo, considerando as informações obtidas pelo satélite S_2, a posição P do receptor está na superfície da esfera de centro P_2 e raio d_2. Assim, P está na interseção destas duas superfícies esféricas e podem ocorrer apenas as duas possibilidades a1) e a2) a seguir:

a1) As esferas se tangenciam em um ponto, o que é altamente improvável, e, neste caso, a posição P do receptor pode ser determinada calculando-se a interseção destas duas esferas, ou

a2) A interseção é uma circunferência, o que não é suficiente para determinar o ponto P. Apenas sabemos que a posição P do receptor está nesta circunferência.

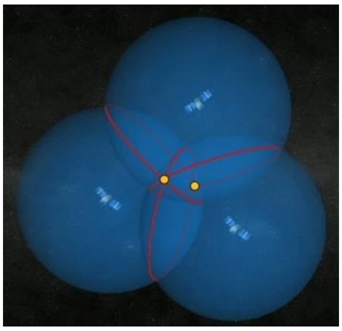


Considerando as informações do terceiro satélite S_3, o receptor está na esfera de centro P_3 e raio d_3, e, portanto, está na interseção das três esferas.

b) Devido às posições relativas dos satélites, que estão todos à mesma distância do centro da Terra, e dos 4 planos orbitais serem pré-estabelecidos na configuração do sistema GPS, podem ocorrer somente as duas possibilidades b1) e b2) para a interseção das três esferas:

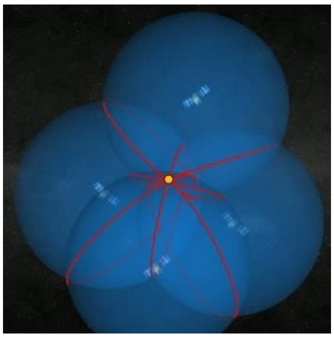
b1) A terceira esfera tangencia a circunferência que é a interseção das duas primeiras esferas (o que também é altamente improvável) e, neste caso o ponto de tangencia é exatamente o ponto P que localiza o receptor, ou

b2) A circunferência, interseção das duas primeiras esferas, intersecta a terceira esfera em exatamente dois pontos. Neste caso, precisamos utilizar as informações obtidas pelo quarto satélite para determinar em qual destes pontos o receptor se encontra.



c) Comentário 1: Em geral, se duas esferas têm interseção uma circunferência, o plano desta circunferência é perpendicular à reta r determinada pelos centros destas esferas. Assim, considerando uma terceira esfera de centro em qualquer ponto da reta r distinto dos centros das duas esferas iniciais e passando por um ponto da circunferência, a interseção das três continuará sendo a circunferência. Esta situação não ocorre com a configuração do sistema GPS, pois os satélites estão em pontos distintos em cada instante e três deles não podem estar alinhados uma vez que estão à mesma distância do centro da Terra.

d) No caso das três esferas, centradas nos três primeiros satélites, se intersectarem em dois pontos (possibilidade b2), consideramos as informações do quarto satélite. A interseção da esfera de centro P_4 e raio d_4 com as três primeiras é um destes dois pontos, e este ponto é a localização do receptor do usuário. Esta é a única possibilidade também, devido à configuração do sistema GPS que possibilita que cada ponto da superfície da Terra seja "visto" por pelo menos 4 satélites não "coplanares".

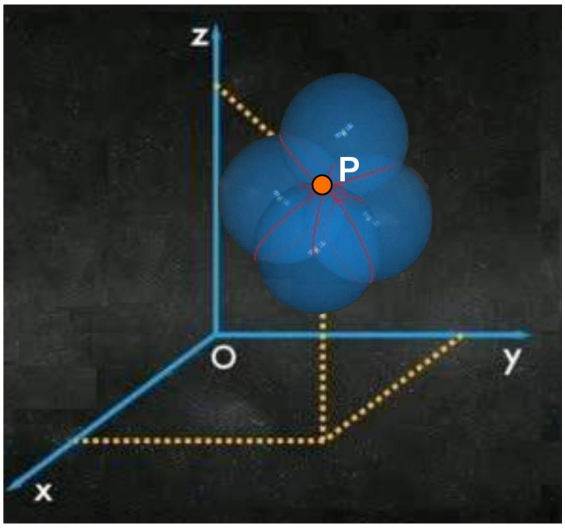


Assim, a localização do receptor fica determinada.

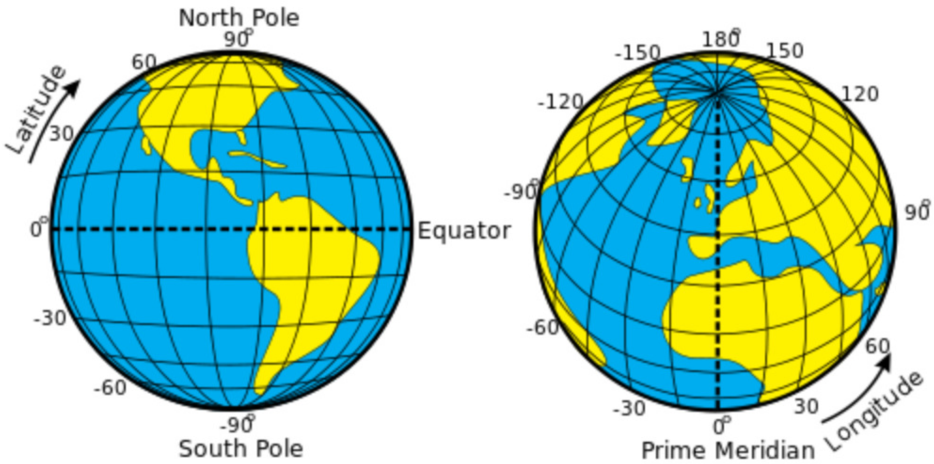
e) Comentário 2: Considerando três esferas quaisquer com centros não colineares e tendo por interseção dois pontos, estes estarão equidistantes do plano que contém os três centros. Qualquer outra esfera de centro fora deste plano e que passa por um destes pontos não passará pelo outro. Por outro lado, se a quarta esfera tiver o centro no plano das três primeiras e passar por um dos dois pontos da interseção também passará pelo outro. Neste caso, obtém-se 4 esferas distintas com interseção formada por dois pontos. Esta situação não acontece com a interseção das esferas centradas nos quatro satélites devido à escolha previamente feita para as posições relativas dos satélites a cada instante, ou seja, sempre existem pelo menos 4 satélites com centros não coplanares que visualizam o ponto em que se encontra o receptor.

Coordenadas da localização do receptor

As posições dos quatro satélites, no exato instante em que os sinais são emitidos para o receptor, podem ser dadas em relação a um sistema ortogonal de coordenadas. Com as coordenadas dos satélites e as distâncias de cada um ao receptor, as equações gerais das superfícies esféricas imaginárias podem ser obtidas, e resolvendo o sistema formado por estas quatro equações, encontramos as coordenadas cartesianas do ponto P onde se encontra o receptor na superfície da Terra.



Após obter as coordenadas do receptor, que está na superfície da Terra, relativas ao sistema ortogonal, estas são convertidas em coordenadas geográficas (latitude e longitude) e altitude (elevação) e, finalmente, mostradas ao usuário em seu aparelho GPS. A atividade 2 da seção *Após a Execução* explora a conversão de um sistema para o outro.

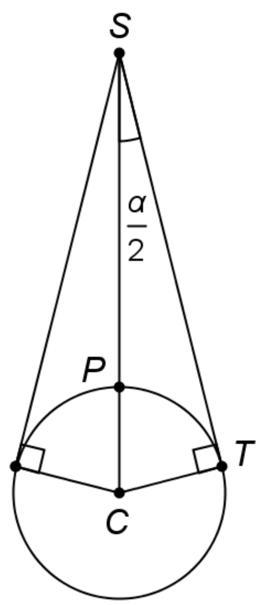


Sugestões de atividades

São sugeridas a seguir atividades a serem propostas aos alunos antes e depois da execução do vídeo.

Antes da execução

1. Considere que o raio da Terra é de aproximadamente 6400 km e que um satélite está a 20.200 km acima do nível do mar. Mostre que o ângulo α de visualização que o satélite tem da Terra é cerca de 28º.



Depois da execução

1. Leia atentamente a seção *"Como a posição do receptor pode ser calculada"* e discuta cada uma das colocações dos itens de a) a e) procurando desenhar e ilustrar com exemplos quando estas situações ocorrem.

2. Considere três eixos coordenados no espaço cuja origem é o centro da Terra, sendo que um dos eixos (o da coordenada z) passa pelos pólos norte e sul, o outro (o da coordenada x) passa no cruzamento do equador com o meridiano de Greenwich e o terceiro (o da

coordenada y) passa pelo cruzamento do equador com o meridiano de 90 graus leste. Considere também que o raio da Terra é cerca de 6400 km. As questões a seguir exploram as conexões entre coordenadas cartesianas e esféricas, dadas pela latitude e longitude (veja também o vídeo *As aventuras do Geodetetive 2* desta série). As relações trigonométricas é que estabelecem estas conexões.

a) Quais são as coordenadas cartesianas (x,y,z) expressas em quilômetros de um satélite a uma altura de 20 000 km do nível do mar e no momento em que está alinhado com o centro da terra e com um ponto de latitude 0^o e longitude oeste 45^o .

b) Considere aqui que a distância do nível do mar ao centro da Terra é de 6400 km.

b1) Determine as coordenadas cartesianas de Brasília DF. (consulte a latitude, longitude e altitude da nossa capital)

b2) Determine as coordenadas cartesianas do ponto de maior altitude no Brasil.

3. ***Atividade suplementar***. Uma esfera (superfície esférica) pode ser descrita num sistema de coordenadas cartesianas tridimensional como o conjunto dos pontos de coordenadas reais (x,y,z) que satisfazem a equação:

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=R^2. \qquad (**)$$

O centro da esfera tem coordenadas (x_o, y_o, z_o) e seu raio é R >0.

a) Dê exemplos de duas equações que descrevem esferas com centro nos pontos (1,2,3), (0,0,0) e raios R_1 e R_2 à sua escolha. Estas esferas se intersectam? Quantas soluções em (x,y,z) tem o seu sistema de duas equações?

b) Varie depois os valores dos raios R_1 e R_2 acima de modo a obter um sistema de duas equações com uma única solução (as esferas se tangenciam). Qual é esta solução?

c) Escolha ainda outros valores para R_1 e R_2 de modo que o sistema dado em a) não tenha solução.

d) Seria possível escolher valores para R_1 e R_2 de modo que sistema de 2 equações tenha exatamente duas soluções?
e) Dê exemplo de um sistema de três equações da forma (**) acima que tenha exatamente duas soluções. Interprete geometricamente.
f) A partir da interpretação geométrica discuta todas as possibilidades para a solução de um sistema de três equações da forma (**). Dê exemplo de um caso especial onde você pode ter infinitas soluções.

Sugestões de leitura

ALVES, Sérgio. *A Geometria do Globo Terrestre*. Apostila 6. OBMEP, 2009. (disponível em www.obmep.org.br/prog_ic_2008/apostila2008.html - acessado em 04/04/2011.)

LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo C. P., WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto C.. *A Matemática do Ensino Médio*. Vol. 2. Coleção do Professor de Matemática, 3ª edição, Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

SILVA J., Epitácio P.. *O Teorema da Função Implícita em um contexto aplicado e algumas conexões no cálculo de áreas de regiões planas*. Dissertação de Mestrado. Campinas-SP: IMECC/Unicamp, 2008 (Capítulo 1) disponível em www.bibliotecadigital.unicamp.br

Ficha técnica

Autoras: *Claudina Izepe Rodrigues* e *Sueli I. R. Costa*
Revisor: *Roberto Limberger*
Coordenador de audiovisual *José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico: *Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Caio José Colletti Negreiros*
Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*