Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Desenhando ondas

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Abordar temas de funções periódicas e somas de funções periódicas;
2. Mostrar algumas propriedades da função seno;
3. Mostrar a interface entre a matemática e a música.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Desenhando ondas

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Função seno. Soma de senóides. Funções períodicas.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Abordar temas de funções períodicas e soma de funções periódicas
2. Mostrar algumas propriedades da função seno
3. Mostrar a interface entre a matemática e a música

Sinopse
O Válter encontra-se sem inspiração artística quando, com a ajuda do seu amigo William, resolve pôr em prática a ideia de "desenhar os sons". Para isso, ele necessitará aprender como funciona a matemática por trás dos sons.

Material relacionado
Experimentos: *Roda gigante;*
Vídeos: *Alice e algumas relações trigonométricas; Alice a e lei dos cossenos; Alice e o cosseno da diferença de ângulos;*
Softwares: *Ondas trigonométricas;*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa aborda conceitos de funções periódicas e somas de funções periódicas.

Mais precisamente, o vídeo mostra como a música se relaciona com matemática através do conceito de onda sonora e de senóides.

O som é uma perturbação que se propaga em um meio com propriedades elásticas na forma de uma onda. Essa onda mecânica é entendida na física como uma combinação linear de funções periódicas. Em cada período essa função tem uma certa forma (ou desenho), chamada de Forma de Onda, a qual está fortemente ligada ao Timbre da fonte sonora ou instrumento. A Amplitude fornece, basicamente, a energia que o som está sendo ouvido, ou seja a intensidade do som que ouvimos é uma função crescente da sua amplitude, melhor ainda, proporcional ao quadrado da sua amplitude. Por fim a freqüência, medida em Hertz, diz quantos períodos estão compreendidos em um segundo de som. A freqüência identifica a nota musical associada ao som. Os músicos denominam as notas (ou suas freqüências associadas) também de "alturas". Enquanto que a altura é medida em Hertz, a intensidade é medida em Decibéis. Um som é, relativamente, "agudo" se sua freqüência é alta e é dito "grave" se sua freqüência é baixa.

Para exemplificar, seja a seguinte onda, representada pela função x(t):

$$x(t) = A.\cos(wt)$$

Neste caso, "A" é a amplitude da onda e a sua intensidade (ou energia) é proporcional a "A^2". O parâmetro "w" é a freqüência da onda e seu valor, como mencionado anteriormente identifica a nota musical que está sendo tocada em um instrumento. A tabela seguinte mostra a identificação conhecida pelos músicos desde o tempo do cientista que estudou profundamente os sons e suas propriedades pela primeira vez, Helmholtz.

Nota Musical	DÓ	RÉ	MI	FA	SOL	LÁ	SI
Freq. (Hz)	262	294	330	349	392	440	494

Tabela 1. Nota musical x Frequência (4ª. Oitava)

A nota base utilizada pelos músicos para afinação de instrumento é a nota lá (440 Hz) que também é o tom que se escuta no telefone antes de iniciar uma chamada ("tom de linha Em teoria musical, duas freqüências são ditas ter uma relação de "oitava" se a freqüência maior é o dobro da freqüência menor. Daí a nota "lá" em diferentes oitavas terá as freqüências mais altas: 880, 1760, etc, ou as mais baixas 220, 110, e assim por diante. O contexto musical mostra-se, assim, um ótimo contexto para se explorar as propriedades trigonométricas das funções seno e cosseno. A saber, a primeira delas é que a soma de senos também é uma função periódica. Seja, por exemplo, a seguinte soma:

$$f(x) = \sin(Nx),$$
$$g(x) = \sin(Mx),$$
$$w(x) = f(x) + g(x)$$

Sabemos que as funções f(x) e g(x) possuem períodos 2π/N e 2π/M, ou seja, elas se repetem cada vez que o x passa esses valores. Mais precisamente:

$$f\left(\frac{2\pi}{N}+x\right)=f(x)\ e\ g\left(\frac{2\pi}{M}+x\right)=g(x)$$

Para a soma de senóide temos, então, que o seu período será 2π/mdc{N,M}. A demonstração deste fato segue os seguintes passos: Suponhamos que mdc{N,M} = d. Então temos que:

$$w\left(\frac{2\pi}{d}+x\right)=\sin\left(N\left(\frac{2\pi}{d}+x\right)\right)+\sin\left(M\left(\frac{2\pi}{d}+x\right)\right)=$$

$$\sin\left(2\pi\frac{N}{d}+Nx\right)+\sin\left(2\pi\frac{M}{d}+Mx\right)=\sin(Nx)+\sin(Mx)=w(x)$$

Pois tanto N/d quanto M/d são inteiros. O gráfico abaixo ilustra o comportamento quando N = 3 e M = 6, neste caso o período é 2π/3.

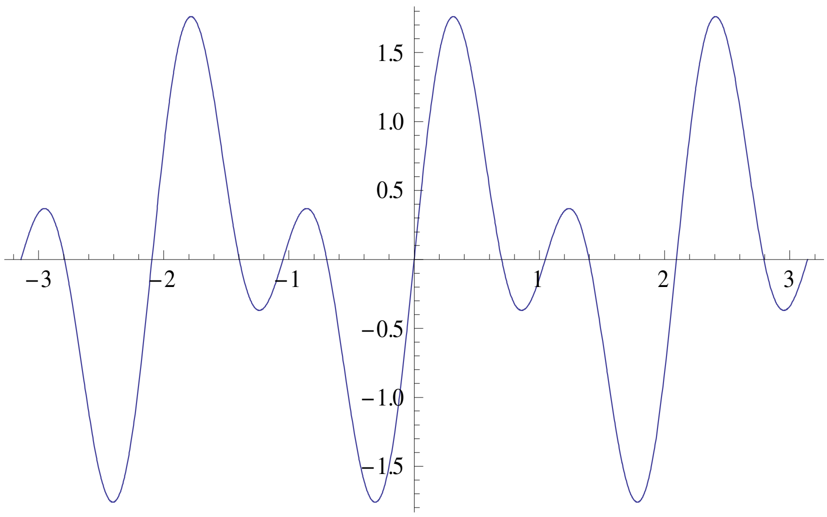


Fig. 1 w(x) = sen(3x) + sen(6x)

Sugestões de atividades

Antes da execução

Recomendamos ao professor revisar trigonometria para os alunos. Podem ser abordados os temas das fórmulas para o cosseno e seno da soma de ângulos, ou, mais basicamente, a definição de senos e cossenos no círculo trigonométrico. Também pode ser abordada a definição, citada acima, de função periódica e uma pequena motivação de qual o seu uso. Com uma calculadora científica com facilidade de gráficos o professor também pode mostrar a soma de várias funções do tipo seno e cosseno.

Depois da execução

Depois da execução, pode-se pedir para os alunos resolverem os seguintes problemas significativos sobre o estudo de ondas:

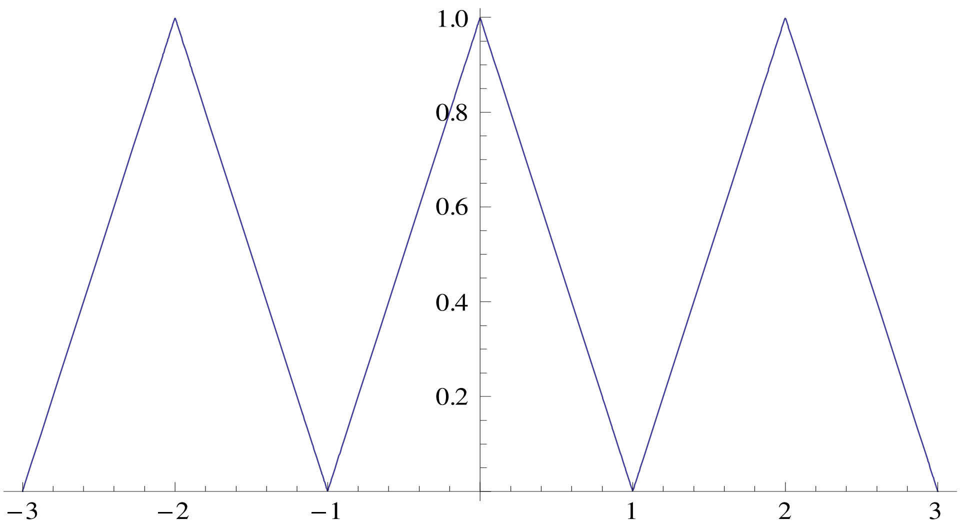
Problema 1 (Defasagem de ondas) Uma onda defasada de um ângulo θ é simplesmente uma função de onda f(x) aplicada a x+θ, ou seja, considerando uma senóide, temos que a função g(x) = sin(x+θ) é uma onda com fase θ. Mostre que esta onda defasada pode ser representada como uma soma de senos e cossenos sem fase, ou seja, que g(x) = A sin(x) + B cos(x), em que A e B são constantes.

Solução: A solução é dada pela formula da soma de senos. Assim:

$$\sin(x+\theta) = \sin(x)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(x) =$$
$$= A sin(x) + B cos(x)$$

Pois θ é uma constante.

Problema 2 (Onda triangular) Nem toda função periódica é uma senóide ou uma função trigonométrica. Para ver isso, considere a função dada pelo gráfico abaixo, que se repete:



Qual o período dessa função? Qual a equação dela entre –1 e 0 e entre 0 e 1?

Resposta: O período da função é 2, já que pode ser visto no gráfico de que de 2 em 2 unidades de x ele se repete. A equação entre –1 e 0 é dada pela reta: $y = x+1$ e entre 0 e 1, é dada por $y = -x+1$

No contexto do exercício 2, pode-se propor para os alunos o seguinte trabalho de criatividade:

Trabalho: Crie a sua própria função periódica, a partir de funções conhecidas (retas, senos, cossenos, parábolas, ou qualquer outra função mais elaborada), dizendo qual o período, qual a amplitude máxima e qual a equação em algum dos períodos da sua função. Compare com a dos colegas. Use funções simples e tente somar duas funções escolhidas.

Sugestões de leitura

Gelson Iezzi (2004) Fundamentos da Matemática Elementar – Vol 3 (Trigonometria). 8ª Ed. Atual Editora.

Sites sugeridos: (Applets sobre ondas e sons)
http://atomoemeio.blogspot.com/2009/03/simulador-ondas-som-e-luz.html

(Núcleo Interdisciplinar de Comunicação Sonora)
http://www.nics.unicamp.br/atual/inicial.html

(Relação entre os números de Fibonnaci e música, em inglês)
http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html#music

Ficha técnica

Autor *Antonio Carlos de Andrade Campello Junior*
Revisor *Adolfo Maia Jr*

Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*