Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

A Dança do Embaralhamento

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Introduzir a noção de grupo de permutação;
2. Mostrar uma aplicação de MMC.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância | Ministério da Ciência e Tecnologia | Ministério da Educação | Governo Federal

A dança do embaralhamento

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Permutação e MMC.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Introduzir a noção de grupo de permutação;
2. Mostrar uma aplicação de MMC.

Sinopse
Luciana cria uma coreografia em que 8 bailarinos, cada um com um pedaço de madeira com uma parte da bandeira do Brasil, trocam de posições segundo uma regra até retornarem à posição inicial. Para entender como isso acontece, ela pede ajuda a seu amigo Carlo, que resolve o problema com o uso de conceitos de permutação.

Material relacionado
Softwares: *Embaralhando Imagens.*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O objetivo deste vídeo é introduzir através de uma situação simples o conceito de grupo de permutação. Aqui, a permutação será analisada do ponto de vista de sua estrutura interna e não do ponto de vista da análise combinatória. Apesar deste conteúdo não fazer parte da grade curricular do Ensino Médio, o problema apresentado é acessível para este nível e pode abrir portas para discussões muito proveitosas matematica e pedagogicamente.

No vídeo, a personagem Luciana criou uma coreografia em que os bailarinos seguram pedaços de madeira com partes da bandeira do Brasil e, a partir da formação da bandeira, trocam de posições até que voltem à formação original.

As trocas de posição seguem uma regra estabelecida pela coreógrafa, e com a ajuda de um ex-aluno de dança, Carlo, ela procura compreender o processo que faz com que os oito bailarinos envolvidos voltem à posição original, após um determinado número de trocas.

Figura 1: formação original

Luciana mostra a Carlo a figura formada após a primeira movimentação, e em seguida explica como ela foi determinada, figuras 2 e 3, respectivamente.

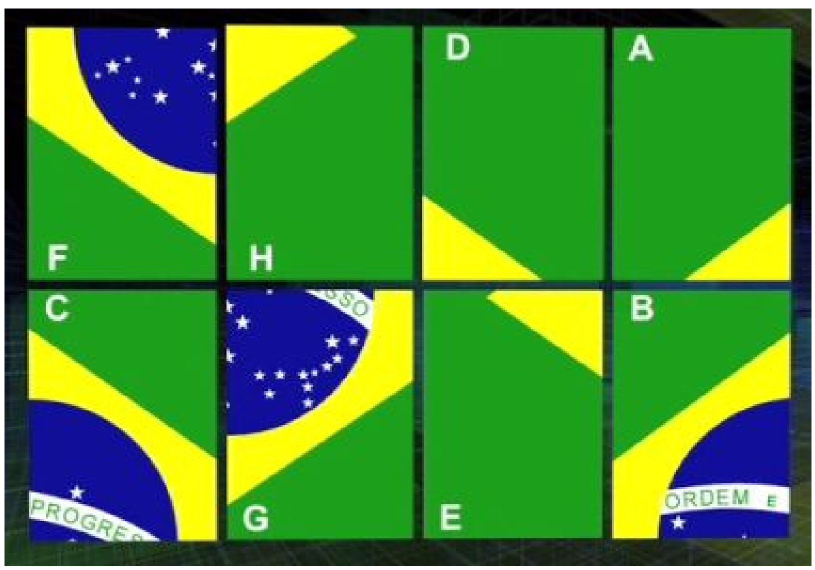

Figura 2: primeira troca

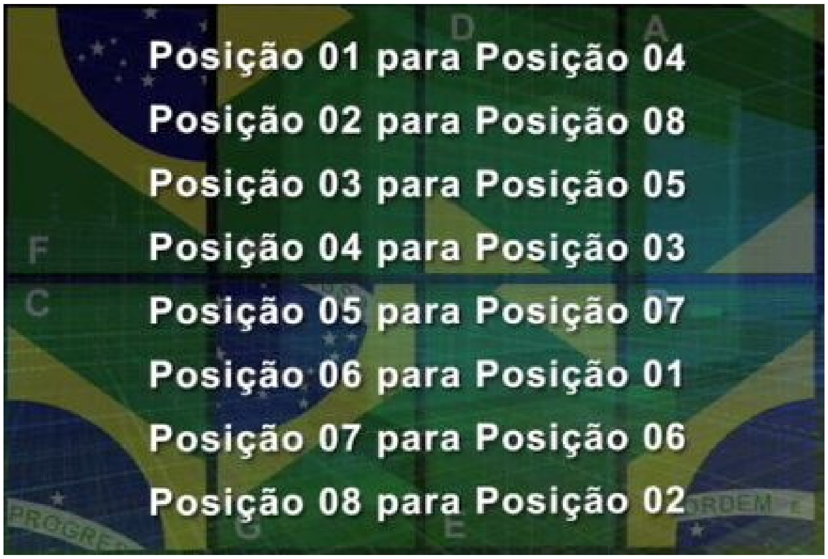

Figura 3: regras para as trocas

Ela comenta que após seis trocas, os bailarinos sempre voltam à posição inicial, mas não entende o porquê.

Carlo explica que a sistemática criada para o embaralhamento é chamada de *permutação*.

Permutação
É uma função bijetora f, de um conjunto X, no mesmo conjunto X, e escrevemos $f: X \to X$.

No caso da coreografia, o conjunto X é o conjunto das 8 posições ocupadas pelos bailarinos.

Ele afirma, ainda, que para qualquer regra para a troca de posições, a bandeira sempre volta à posição original em algum momento. Ao longo deste texto veremos o porquê.

Um fato importante para entendermos a afirmação acima é que um conjunto com *n* elementos, possui *n!* permutações, portanto, a partir de *n!* trocas de posição, certamente teremos configurações repetidas.

Para compreender o processo, tomemos como base o exemplo do vídeo. Cada posição onde haverá um bailarino corresponde a um pedaço da bandeira, o esquema abaixo numera cada posição.

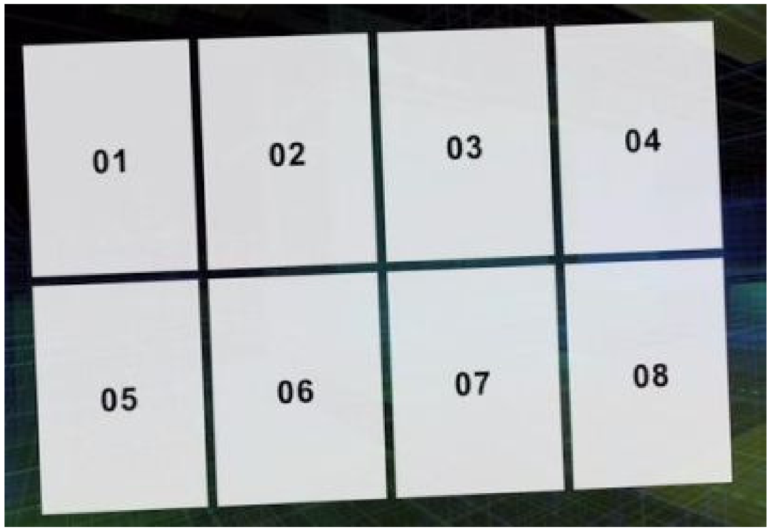

Figura 4

No vídeo, vemos o processo de embaralhamento até que a formação inicial seja alcançada, neste caso, após 6 embaralhadas. Para entender o que acontece, vejamos o que ocorre com os pedaços A e C:

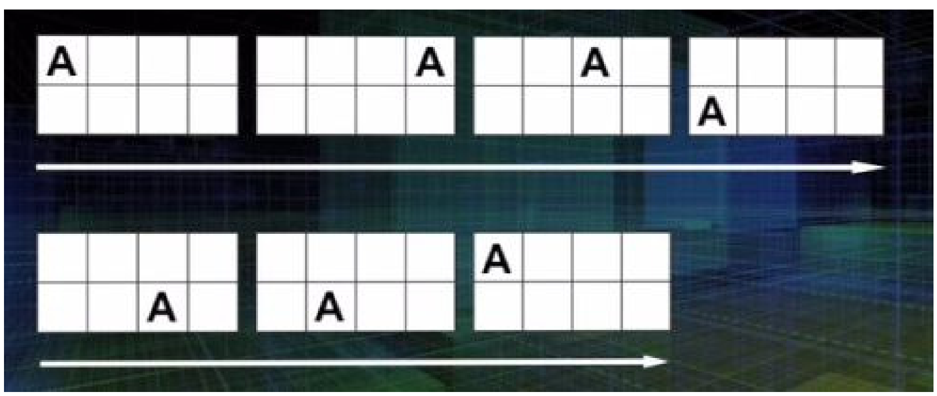

Figura 5: pedaço A

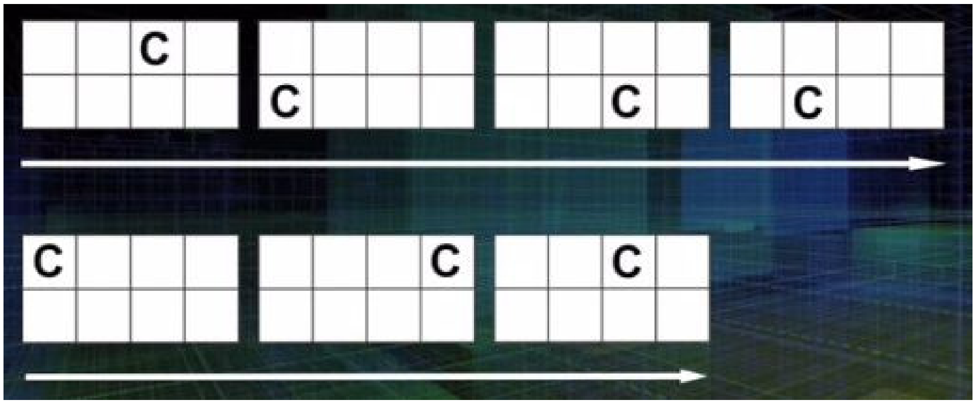

Figura 6: pedaço C

Podemos perceber que essas movimentações são análogas, e essa analogia é mantida também para os pedaços D, E, F e G.

Já os pedaços B e H respeitam outra regra para suas trocas, como vemos abaixo.

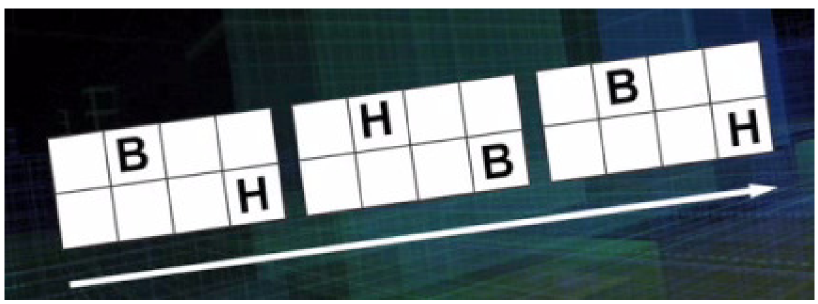

Figura 7: 2 trocas de B e H

Esses pedaços apenas trocam de posição entre si.

Cada uma das regras criadas para a troca de posição dos pedaços é chamada de *ciclo*. Um ciclo corresponde às posições ocupadas por cada pedaço até que este volte à posição inicial. A figura 8 mostra os ciclos dos 8 pedaços.

Figura 8: Ciclos

Um fato importante é que para representar um ciclo, não importa a posição inicial, desde que a ordem seja mantida. Por esse motivo os ciclos de A, C, D, E, F e G são equivalentes, assim como os de B e H também são equivalentes. Desta forma podemos representar da seguinte maneira a regra criada por Luciana para a coreografia.

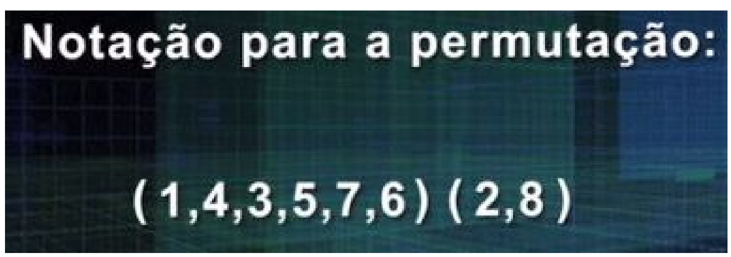

Figura 9: representação por ciclos

A coreógrafa deseja entender como saber o número de embaralhadas necessário para que se volte à primeira formação. Para ajudá-la, Carlo exibe os seguintes esquemas, correspondentes aos dois ciclos.

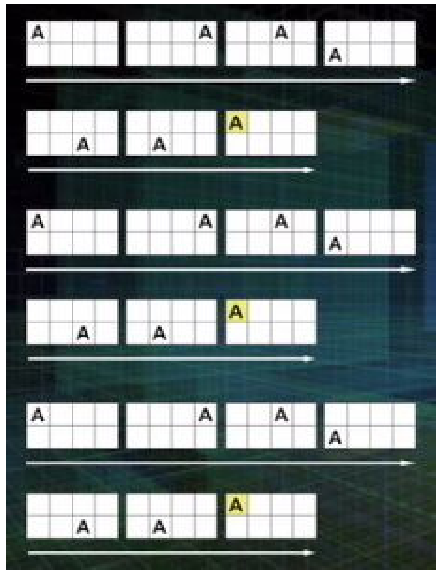

Figura 10: ciclo 1

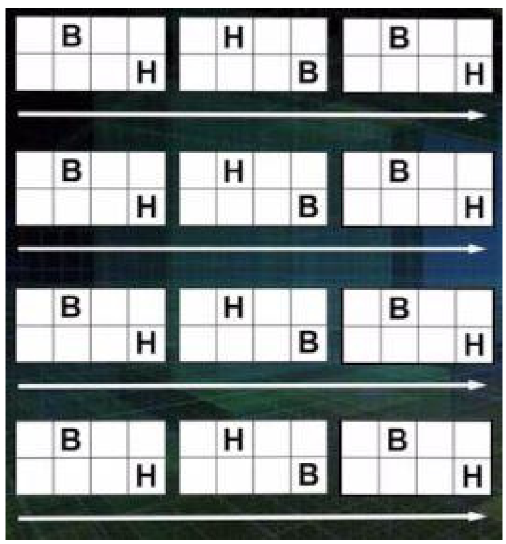

Figura 11: ciclo 2

No primeiro ciclo vemos que o pedaço A volta à posição 1 após 6, 12, 18 embaralhadas, e assim por diante. O segundo ciclo mostra que os pedaços B e H voltam a posição inicial após 2, 4, 6 embaralhadas e assim por diante.

Luciana percebe, então, que o número de embaralhadas necessário é igual ao número de elementos de cada ciclo, isto é, 6 para o ciclo 1 e 2 para o ciclo 2. Desta forma cada pedaço volta à sua posição original após um número de trocas que seja um múltiplo do número de elementos do ciclo o qual ele pertence.

Logo, para que todos os pedaços estejam em suas posições iniciais, precisamos que o número de embaralhadas seja um múltiplo comum das quantidades de elementos em cada ciclo, ou seja, o menor número de embaralhadas que retorna à configuração original é igual ao mínimo múltiplo comum, MMC, entre os números de elementos de cada ciclo.

Para verificar se entendeu, Luciana propõe uma nova regra para a troca de posições.

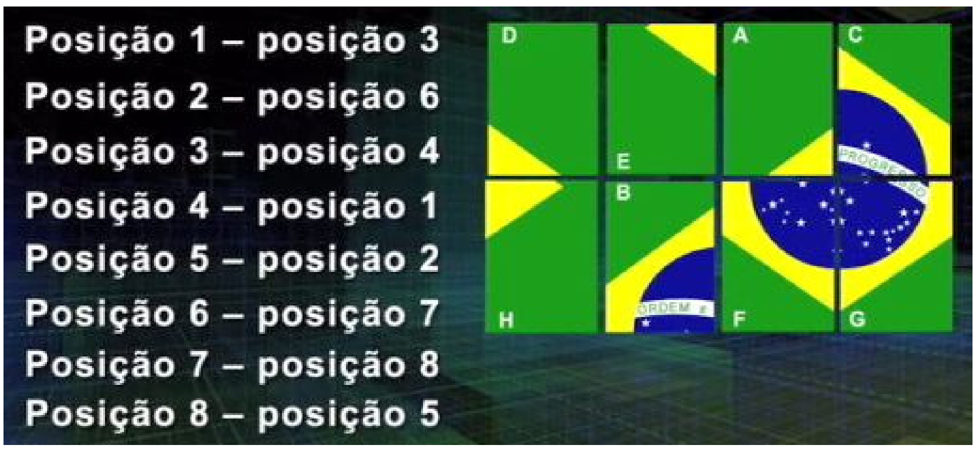

Figura 12: nova regra

Em notação de ciclos, teremos:

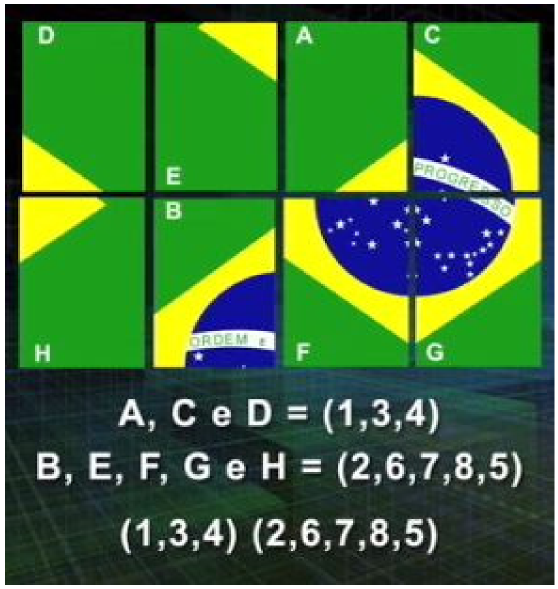

Figura 13: notação de ciclos

O primeiro ciclo possui 3 elementos, o segundo, 5 elementos. Seguindo o raciocínio anterior, teremos que a formação original aparece após 15 embaralhadas.

Figura 14

De maneira formal, o que fazemos a cada embaralhada é aplicar uma função f, que realiza a permutação seguindo a regra escolhida. A medida que as trocas são realizadas, o que ocorre é a composição de funções *f*, $f \circ f \circ \cdots \circ f$.

Denotando por *Id*, a função identidade, isto é, a função que mantém a configuração como ela está, para algum número $k \leq n!$, teremos que $f^k = Id$, onde f^ké a função composta $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \quad vezes}$. O menor número natural com esta propriedade é chamado de *ordem da permutação*.

Mais ainda, se k é a ordem de uma permutação e existe um número *m*, tal que $f^m = Id$, então *m* é um múltiplo de *k*.

Os elementos f^i junto com a operação composição entre eles formam uma estrutura algébrica chamada **grupo**, mais especificamente, um grupo de permutações. Para um aprofundamento sobre isso, veja o Guia do Professor do software Embaralhando Imagens.

Sugestões de atividades

Depois da execução

Após a exibição deste vídeo, propomos como atividade a execução do Software Embaralhando Imagens, que complementa muito bem este material.

Mas outras atividades também podem ser realizadas sem o uso do software.

Peça que cada aluno leve de casa uma figura, que deverá ser recortada em 9 pedaços de mesmo tamanho. Identificando as posições, eles devem criar suas próprias regras de embaralhamento, e a partir daí identificar os ciclos e escrever a regra utilizando a notação de ciclos. Utilizando o que aprenderam do vídeo, eles devem descobrir após quantas embaralhadas a figura deverá voltar à formação inicial, e em seguida realizar as embaralhadas e verificar se tudo ocorre como o esperado. Esta atividade pode ser realizada em grupos, e diferentes regras podem ser criadas.

Em um segundo exercício, pode-se propor um problema inverso. Os grupos devem decidir após quantas trocas de posições desejam que a figure retorne à posição original. Escolhido o número, devem criar regras que atendam a essa exigência.

Neste segundo exercício, o importante é escolher bem a ordem de cada ciclo utilizado, pois são estas informações que determinam o número de embaralhadas necessárias.

Ficha técnica

Autor do Guia *Rafael Santos de Oliveira Alves e Leonardo Barichello*
Revisão
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*