Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Criador e criatura

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar algumas das consequências da forma com que o fator de escala afeta comprimentos áreas e volumes. Neste sentido são mostrados alguns exemplos do cotidiano e é discutida a variação da resistência de corpos sólidos ao se considerar corpos proporcionais e formados com o mesmo material.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Criador e criatura

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Figuras semelhantes: consequências dos fatores de escala sobre comprimentos, áreas e volumes.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos

Apresentar algumas das consequências da forma com que o fator de escala afeta comprimentos, áreas e volumes.

Sinopse
Galileu em um diálogo com Salviati, personagem criado por ele, discute consequências da alteração de medidas por um fator de escala e fala sobre a resistência dos materiais. Apresenta experimentos comparando a resistência de corpos sólidos de mesmo material e construídos proporcionalmente.

Material relacionado
Áudio: *IMC, obesidade e IMC;*
Vídeo: *Um certo fator de escala*.

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

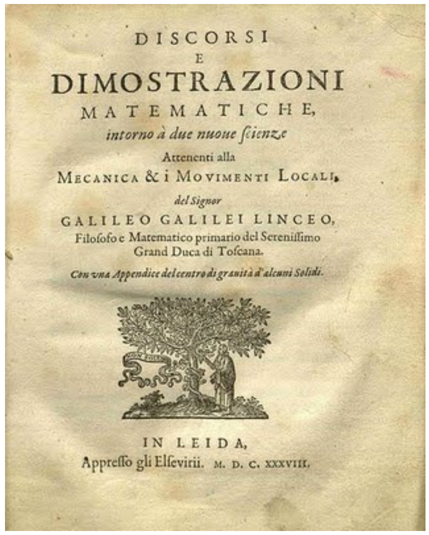
Sobre o programa

Galileu em um diálogo com Salviati, personagem criado por ele, discute consequências da alteração de medidas por um fator de escala e fala sobre a resistência dos materiais. Apresenta experimentos comparando a resistência de corpos sólidos de mesmo material construídos proporcionalmente.

Neste vídeo, o personagem Galileu representa o importante cientista Galileu Galilei (1564-1642) considerado um marco para o desenvolvimento da ciência. Duas das obras deste cientista, conhecidas como *O Diálogo* e *O Discurso*, são escritas em forma de uma conversa entre três interlocutores, Salviati, Sagredo e Simplicio, recurso muito comum na época. Como nas obras de Galileu Galilei, também neste vídeo um segundo personagem chama-se Salviati, que representa uma criação do personagem Galileu, e os dois estabelecem um diálogo sobre a resístência de materiais.

Galileu e as Duas Novas Ciências
Galileu Galilei nasceu em Pisa, Itália em 15 de fevereiro de 1564 e faleceu em Arceti, Itália em 8 de janeiro de 1642. Em seu livro *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a Due Nuevo Scienze* (Discursos e Demonstrações Matemáticas acerca de Duas Novas Ciências),

publicado em 1638, um dos temas tratados é sobre a resistência dos materiais.

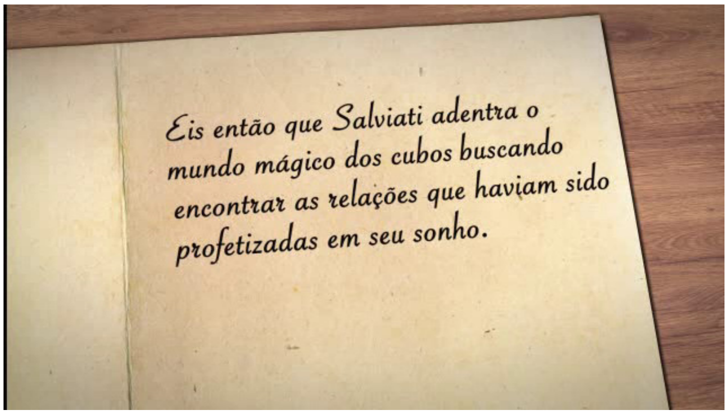


Este livro foi escrito em forma de diálogo entre três personagens: Salviati, Sagredo e Simplício.

Abaixo seguem alguns trechos deste livro que tratam do tema abordado no vídeo e que foram inspiração para o roteiro deste:

> *... abstraindo-se de todas as imperfeições da matéria e supondo-a perfeitíssima, inalterável e isenta de toda mudança acidental, sua existência material faz com que a máquina maior, fabricada com a mesma matéria e com as mesmas proporções que a menor, seja perfeitamente simétrica em todas as outras condições à menor, menos no vigor e resistência ao tratamento violento, pois, quanto maior for, proporcionalmente mais fraca será. ...*
>
> *... uma vez que se pode demonstrar geometricamente que as maiores são sempre proporcionalmente menos resistentes que as menores. De modo que existe um limite que se impõe necessariamente não apenas a todas as máquinas e estruturas artificiais, mas também às naturais, além do qual não pode transpor nem a arte nem a natureza; transpor, digo, desde que se preservem sempre as mesmas proporções e a identidade da matéria. ...*

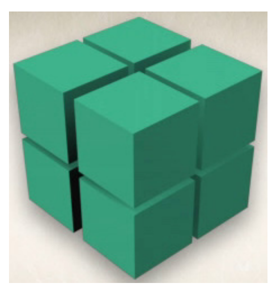
Foi no período de 1592-1610 quando lecionou em Pádua que fez pesquisas relativas à resistência dos materiais. Sendo muito observador, percebeu que estruturas geometricamente semelhantes, como por exemplo, máquinas ou edificações construídas com os mesmos materiais, eram relativamente mais resistentes quando construídas em escalas menores. Galileu, além de conseguir explicar este fato, estabeleceu condições para determinar dimensões seguras para estruturas feitas de diversos materiais.



Área da superfície externa de corpos semelhantes

Para ilustrar o fato de que objetos semelhantes menores têm mais superfície em relação ao seu volume do que os maiores é apresentado um cubo a ser subdividido em cubos menores.

Dividindo um cubo em 8 cubinhos de aresta igual a a, como mostra a ilustração, a área da superfície externa de cada cubinho é $6a^2$, e, assim, o total de área externa dos 8 cubinhos é igual a $8.6a^2=48a^2$.



Como a aresta do cubo maior é igual a $2a$, a área de sua superfície externa é $6(2a)^2=24a^2$.

O cubo maior e os 8 cubinhos têm o mesmo volume, mas a relação entre as áreas das superfícies externas dos 8 cubinhos e do cubo maior é igual a $(48a^2)/(24a^2)=2$, o que significa que os 8 cubinhos têm duas vezes mais superfície externa que o cubo maior.

O fato ilustrado com os cubinhos ocorre para objetos de qualquer formato. Como ao ampliarmos um objeto sólido por um fator de escala b, seu volume é multiplicado por b^3, enquanto sua área é multiplicada por b^2 (*), se tivermos b^3 objetos menores, teremos o mesmo volume do objeto maior, mas com b vezes mais área. Por exemplo, você pode verificar que se o cubo apresentado no vídeo tivesse sido subdividido em $27=3^3$ cubinhos, a área total dos cubinhos seria 3 vezes maior do que a do cubo grande. No vídeo este fato e suas conseqüências que conhecemos da prática é também exemplificado com batatas e cubos de gelo.

(*) Uma demonstração rigorosa deste fato envolve cálculo diferencial, mas uma abordagem intuitiva que dá idéia de como isto pode ser demonstrado é apresentada em [LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria*].

O fator de escala e a resistência de materiais

A relação entre o fator de escala e a resistência de materiais é mostrada no vídeo por meio da variação da pressão que um objeto exerce sobre uma superfície ao se considerar objetos relacionados por um fator de escala e sendo formados pelo mesmo material.

A pressão que um objeto exerce sobre uma superfície é a medida da força dividida pela área de contato do objeto com a superfície.

$$Pressão = \frac{Peso}{Área}$$

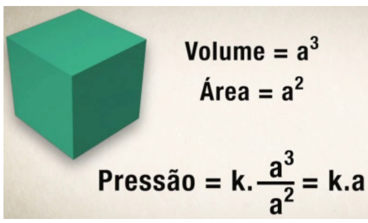
Nesta situação, a força de pressão na superfície é o peso do objeto, e este é proporcional ao volume do objeto. Assim,

$$Força = Peso = k.volume,$$

onde k é uma constante que depende da gravidade na superfície da Terra e da densidade do material do objeto.

Para um cubo de aresta a, a pressão P_a que ele exerce sobre uma superfície na qual está apoiado é

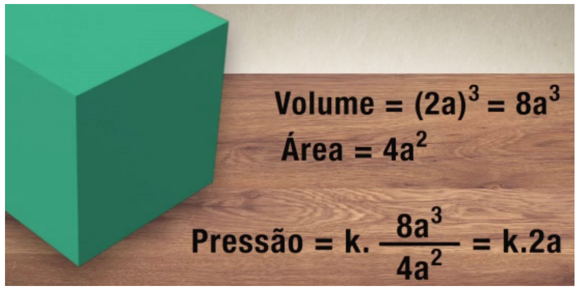
$$P_a = \frac{Peso}{Área} = \frac{k.Volume}{Área} = \frac{ka^3}{a^2} = ka.$$



Um cubo maior de aresta $2a$ feito do mesmo material que o anterior exercerá uma pressão sobre a superfície dada por

$$P_a = \frac{Peso}{Área} = \frac{k.Volume}{Área} = \frac{k(2a)^3}{(2a)^2} = 2ka\ .$$

Assim, quando ampliamos um cubo por um fator de escala 2, a pressão exercida sobre a superfície é duplicada.



Se fôssemos aumentando o fator de escala ***b*** que amplia o cubinho, isto é, se em vez do dobro (***b***=2, como aparece no vídeo), tomássemos ***b***=3, 4, 5, ..., iríamos aumentando a pressão que estes cubos maiores exerceriam sobre a superfície do mesmo fator ***b***, até o momento em que o material com que é feito o cubo não resistiria. Isto no vídeo é ilustrado com cubos de gelatina que tem resistência muito baixa.

Como comentamos no início, este foi um dos assuntos abordados por Galileu em seu livro "*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a Due Nuevo Scienze".*

A observação final apresentada no vídeo sobre resistência de materiais é o fato de que seres humanos não poderiam ter o dobro da altura que têm.

Fator de escala e o índice de massa corporal

O Índice de Massa Corporal (IMC) é um índice que depende do peso e altura de pessoas adultas. É definido como o peso em quilos dividido pelo quadrado da altura em metros (kg/m2).

$$\text{IMC} = \frac{\text{peso}}{(\text{altura})^2}$$

Os valores de IMC são independentes de idade e os mesmos para o sexo masculino e feminino e é utilizado para classificar baixo peso, peso ideal, sobrepeso e obesidade em adultos segundo uma tabela internacional.

Situação	IMC em adultos (kg/m^2)
abaixo do peso ideal	abaixo de 18,5
no peso ideal	entre 18,5 e 25
acima do peso ideal	entre 25 e 30
obeso	acima de 30

Por exemplo, um adulto que pesa 60kg e cuja altura é 1,60 m terá um IMC de 23,44. Pela tabela, este adulto está no peso normal.

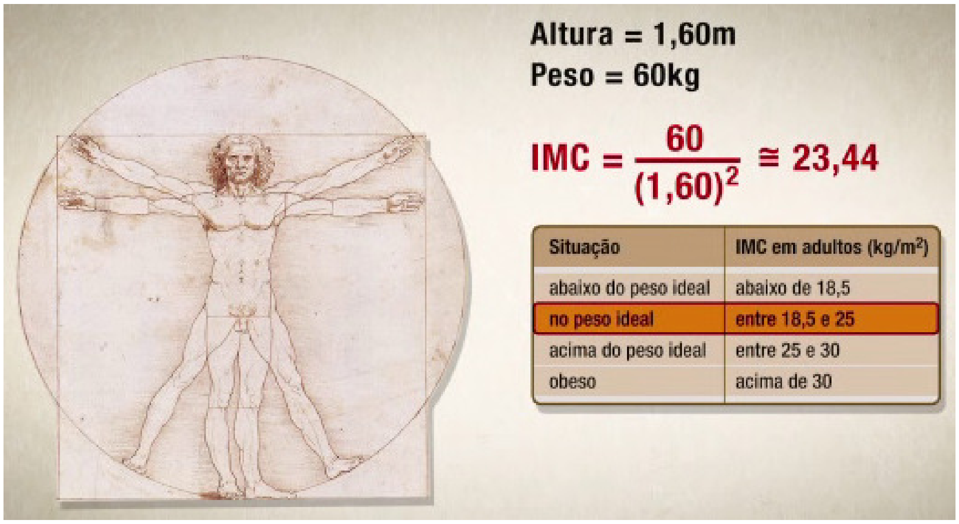
Altura não é uma medida muito perfeita do fator de escala. Diferentes partes do corpo como cabeça e pernas são ampliadas com diferentes fatores quando a altura cresce.

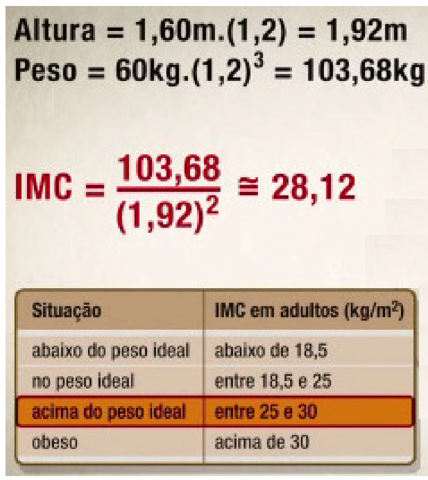
Se o ser humano fosse feito de um único material, por exemplo, água, e todas as partes de seu corpo crescessem tendo a altura como fator de escala, então teríamos um único número para a razão peso/altura^3 para figuras semelhantes. Se assim fosse, este seria o índice correto para medir massa corpórea.

Para uma análise comparativa de populações o índice pode fazer sentido. Por exemplo, comparar a média do índice de recém nascidos de uma região com outra região.

Mas, de uma forma geral temos que tomar cuidado e não usar o IMC de forma generalizada, pois falando a grosso modo populações que tem média de estatura maior tenderão a ter IMC maiores, mesmo que não sejam “mais gordas”.

Uma pessoa de 1,60 m e outra de um metro e noventa com mesmo IMC, a tendência é a de que a mais baixa seja “mais gorda”.





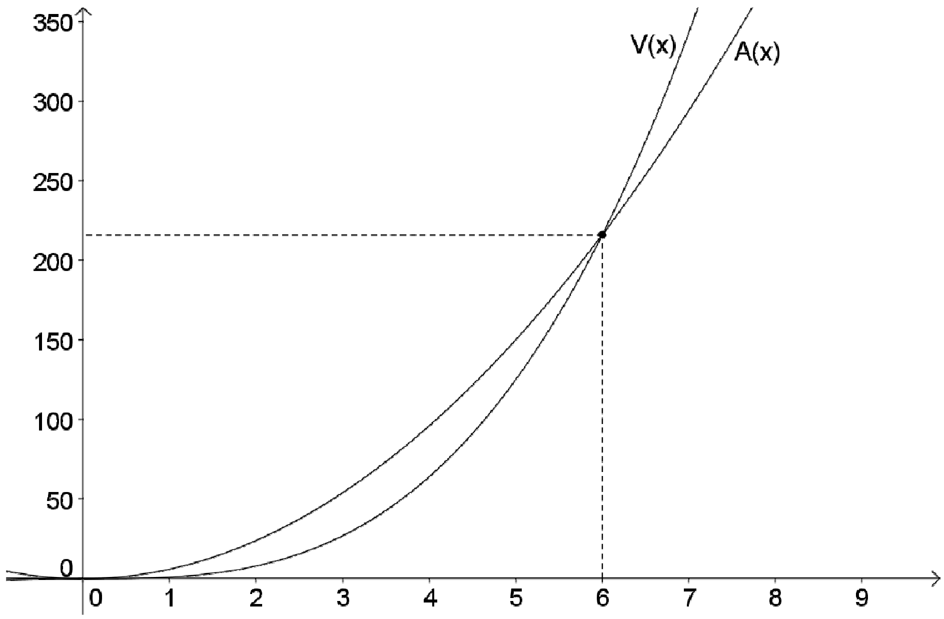
No vídeo também é comentado que por causa da pequena estatura o IMC não é uma boa medida para bebês, que podem ser bem gordinhos com IMC menor do que 14!

Sugestões de atividades

Antes da execução

Atividade 1

Os gráficos abaixo mostram o volume V(x) e a área A(x) de um cubo em função do lado x.



(a) Desenhe o gráfico da função quociente f(x)=V(x)/A(x) sendo x a medida da aresta do cubo. O que conclui?

(b) Considere agora um cilindro com tampa e fundo com raio da base igual a x e altura igual a 2x. Qual o volume, V(x) deste cilindro? Qual a área A(x) da superfície externa deste cilindro? Qual é o comprimento L(x) do contorno da base deste cilindro?

b.1) Esboce os gráficos de V (x), de A (x) e de L(x) num mesmo par de eixos. O que observa?

b.2) Esboce o gráfico das funções-quociente V(x)/A(x), $V(x)/x^3$, $A(x)/(L(x))^2$ e $V(x)/(A(x))^{(3/2)}$. O que pode concluir?

Atividade 2

A quantidade de caloria que o sol produz por grama por dia é cerca de $4{,}5x10^{-8}x24x60x60$. Uma pessoa de 70 quilos queima em média 2720 calorias por dia o que resulta em 2720/70000 por grama por dia o que é muito maior do que a do sol. (O número de calorias/grama é 10 vezes maior do que a do sol). Parece estranho, não?

Por outro lado se você considerar a taxa caloria por centímetro quadrado do sol, esta é $23{,}2x10^{9}$ vezes a taxa por grama, enquanto que no caso do homem ela é apenas 70000/14000 vezes a taxa por grama.

Você pode verificar estes cálculos sabendo que a área de pele de uma pessoa de 70 quilos é cerca de 14.000 centímetros quadrados. Isto é,

0,18 caloria por centímetro quadrado por um dia – homem

1426427883936000 caloria por centímetro quadrado por um dia – sol

Depois da execução

Atividade 1

Numa quadra com chão de madeira, o que você acha que estragaria mais o chão: Um desfile de modas onde a modelo usa saltos altíssimos ou um elefante que atravesse a quadra? Colete dados e medidas para justificar sua resposta.

Atividade 2

Escolha quatro entre seus colegas voluntários de diferentes alturas e sexo diferente que vocês considerem que visualmente tem um peso adequado.

Calcule seus índices IMC, IAC (**), V/h^3 e Cintura/ altura.

Anote suas observações e conclusões.

(**) O pesquisador Richard N. Bergman, da Universidade do Sul da Califórnia, e sua equipe publicaram um artigo na revista *Obesity*

(2011) propondo um novo índice – Índice de adiposidade corporal (IAC) – definido pela seguinte fórmula

$$IAC = \frac{medida\ do\ quadril}{(altura)^{\frac{3}{2}}} - 18$$

O índice de gordura saudável para mulheres vai de 21 a 32, de 33 a 38, está acima do peso, e acima de 38 já é obesidade. Para homens, para considerar peso normal o índice deve estar entre 8 e 20 pontos, de 21 a 25 é considerado acima do peso, e acima de 25 pontos é a faixa de obesidade.

Atividade 3

Como comentado não se pode considerar que a altura de uma pessoa seja uma medida do fator de escala, pois se a altura de uma pessoa mais alta é b vezes a altura de uma menor, diferentes partes de seus corpos estarão em diferentes proporções, mas dependerão de alguma forma deste fator de ampliação da altura. Por isso é de se esperar que entre duas pessoas “igualmente gordas” a mais baixa terá IMC menor. Faça uma pesquisa experimental com seus colegas para ver se esta hipótese se verifica.

Depois calcule também para cada par de colegas “igualmente gordos” o quociente peso/altura^3, e observe os resultados.

Sugestões de leitura

ÁVILA, Geraldo. *Aplicação de áreas e volumes*. Revista do Professor de Matemática, nº 11, pp. 31- 38**.** São Paulo: SBM, 1987.

LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria*. Coleção do Professor de Matemática**.** Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MARICONDA, Letizio, MARICONDA, Pablo R.. *Duas Novas Ciências. Galileu Galilei*. Tradução do original “*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a due nuove scienze attenenti Allá Mecanica Ed ai Movimenti Locall – Galilei, Galileu*” 2ª. ed. Campinas: Nova Stella Editorial, 1988.

Ficha técnica

Autoras: *Sueli I. R. Costa e Claudina Izepe Rodrigues*
Revisor: *Roberto Limberger*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico: *Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Caio José Colletti Negreiros*
Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*