Matemática Multimídia

Geometria e medidas

Guia do Professor

Vídeo

A Comunidade

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar uma aplicação de um ponto notável do triângulo, o circuncentro.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância | Ministério da Ciência e Tecnologia | Ministério da Educação | Governo Federal

A Comunidade

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Pontos notáveis do triângulo: circuncentro.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar uma aplicação de um ponto notável do triângulo, o circuncentro.

Sinopse
João precisa resolver o problema de onde montar uma horta na comunidade sem prejudicar as famílias envolvidas no projeto e para isso conta com a ajuda de Deucy. Na solução do problema, eles vão ter que lidar com o circuncentro de um triângulo.

Material relacionado
Experimentos: *Onde fica a lixeira?*
Áudios: *O que é baricentro?*
Vídeos: *Em equilíbrio;*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Este programa tem como objetivo apresentar uma aplicação prática envolvendo um dos pontos notáveis de um triângulo, o circuncentro.

João está com um problema em sua comunidade. Uma horta será montada e as três famílias envolvidas no mutirão desejam ficar próximas a ela. Com a ajuda de Deucy, João leva duas sugestões para a reunião da comunidade, a de deixar a horta equidistante às três casas, e a de construí-la em um ponto que minimize a construção dos caminhos que ligarão as casas à horta.

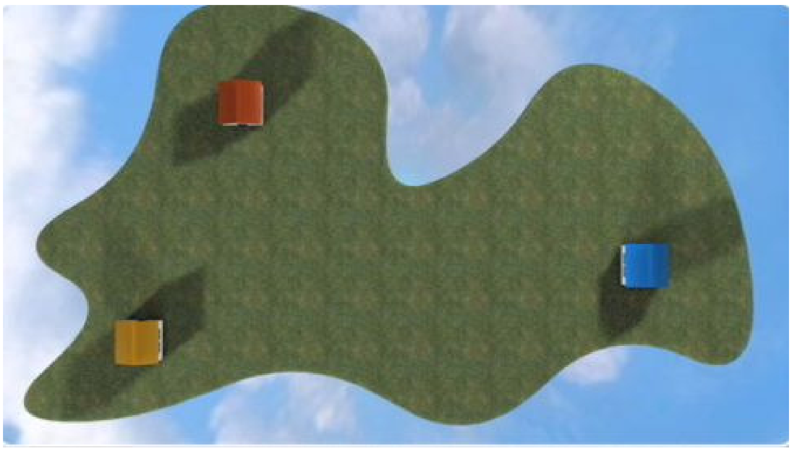

Figura 1

Esta última sugestão resulta em uma economia na quantidade de caminho que será aberta, mas causa uma grande diferença entre as distâncias percorridas por cada família, como pode ser visto no esquema abaixo.

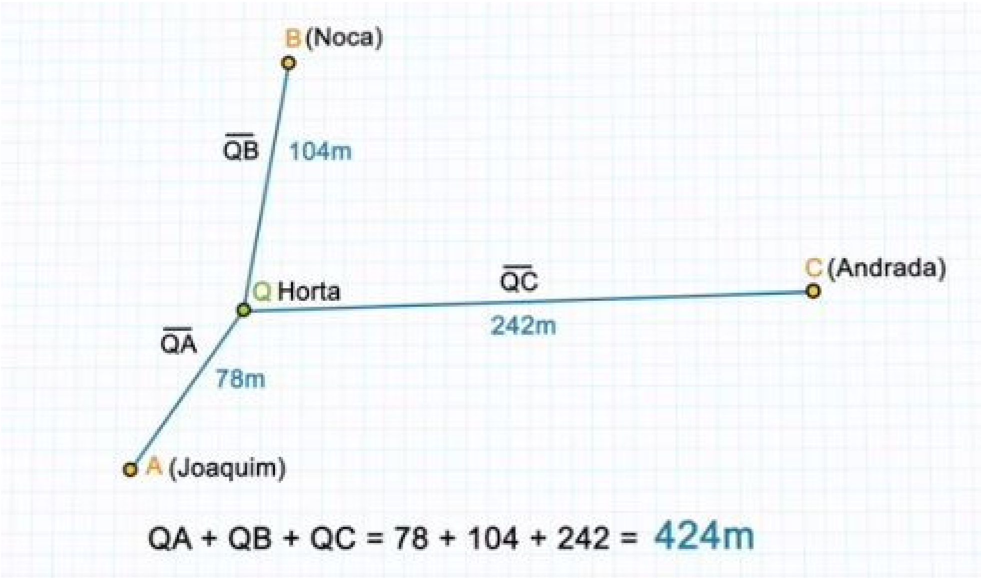

Figura 2: ponto que minimiza a soma das distâncias.

Como dito, essa solução prejudicaria uma das famílias e, segundo João, o estatuto da comunidade não permite isso. Um método para encontrar essa solução, ou seja, para encontrar o ponto que minimiza a soma das distâncias até cada um dos vértices está descrito no Experimento *Onde fica a lixeira?* e no seu Guia do Professor.

Voltando à primeira sugestão, Deucy lembra que, como os pontos não são colineares, eles determinam uma única circunferência (uma demonstração deste fato também está descrita no Experimento *Onde fica a lixeira?* e no seu Guia do Professor) e o centro dessa circunferência, por definição, é equidistante a todos os pontos desta, portanto, é o ponto em que a horta deve ser construída para que fique exatamente a mesma distância de cada uma das casas. Mas como encontrar esse ponto?

Um dos pontos notáveis do triângulo é o *circuncentro*, que é o ponto de encontro das *mediatrizes*. A mediatriz é uma reta perpendicular a um lado do triângulo, passando pelo seu ponto médio.

A seguir, vamos demonstrar que o circuncentro é equidistante aos três vértices do triângulo. A afirmação é válida em qualquer caso, mas usaremos o exemplo do vídeo para ilustrar a demonstração.

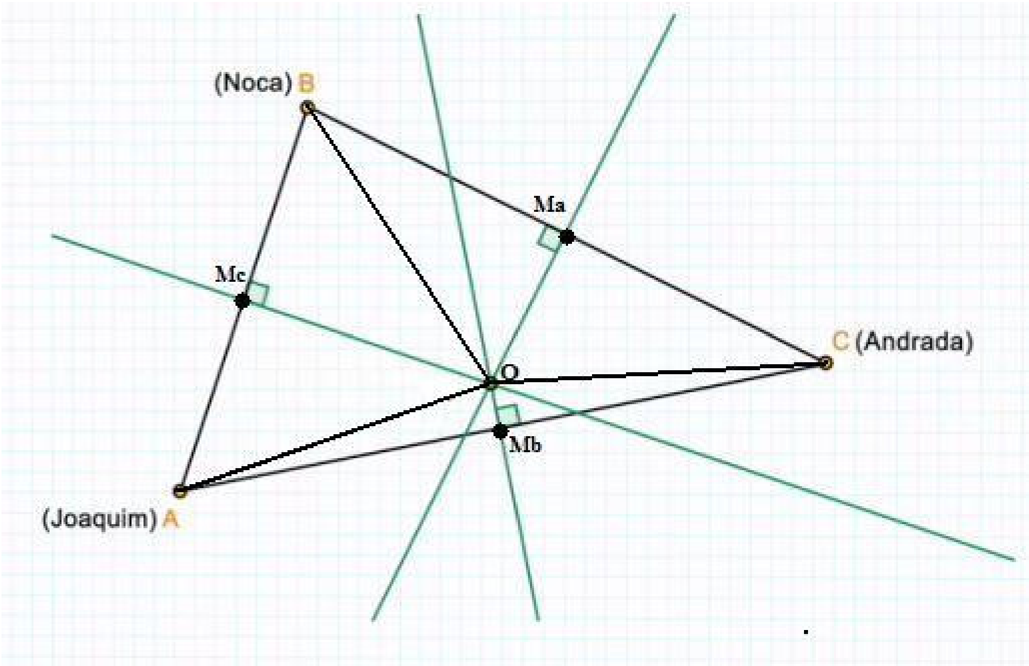

Figura 3: circuncentro é equidistante aos vértices.

Os pontos M_a, M_b e M_c, são, respectivamente, os pontos médios dos lados BC, AC e AB. Desta forma vemos que os triângulos AOM_c e BOM_c possuem dois lados e o ângulo entre eles (reto) iguais, portanto, pelo caso *LAL* (lado-ângulo-lado) de semelhança de triângulo, os segmentos AO e BO têm o mesmo comprimento.

Analogamente, os triângulos AOM_b e COM_b são semelhantes de acordo também com o caso *LAL*, de forma que AO e CO possuem o mesmo comprimento. Dessa forma, o ponto O, o encontro das mediatrizes, é o centro de uma circunferência que passa por A, B e C e tem como raio, a distância de um vértice ao ponto O.

Por outro lado, como dissemos, esses três pontos não colineares determinam uma **única** circunferência. Logo, uma circunferência que passe pelos vértices de um triângulo é única, e tem seu centro sobre o encontro das mediatrizes, o circuncentro. Tal circunferência é dita circunscrita ao triângulo.

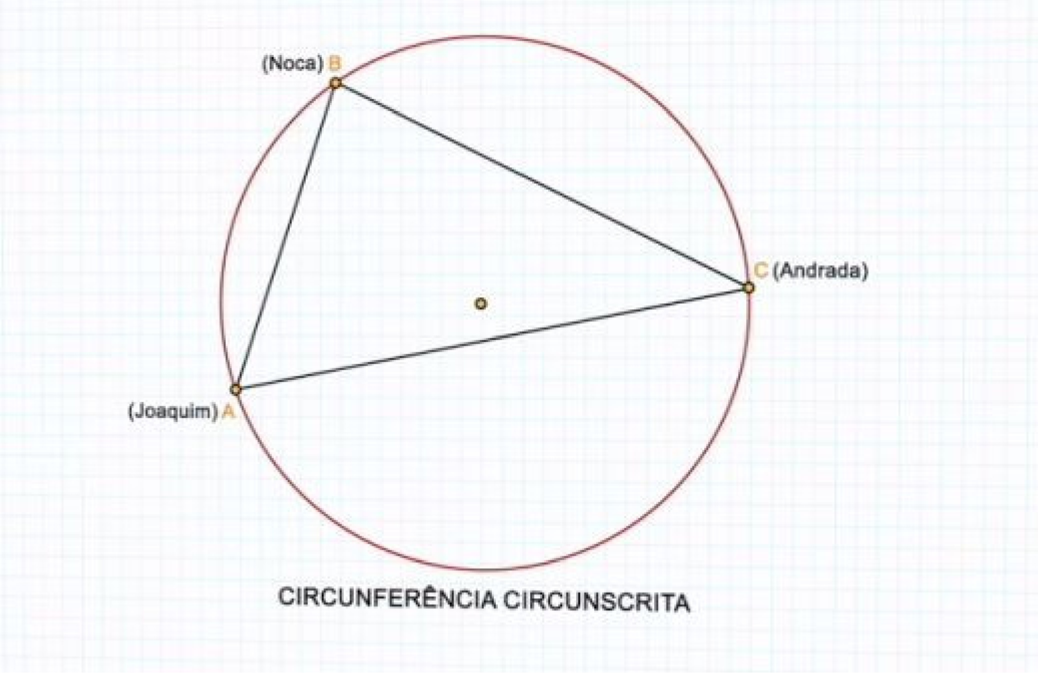

Figura 4

Deucy ainda comenta sobre o caso de algum ângulo do triângulo ser obtuso. Neste caso o circuncentro será externo ao triângulo, mas as propriedades são mantidas.

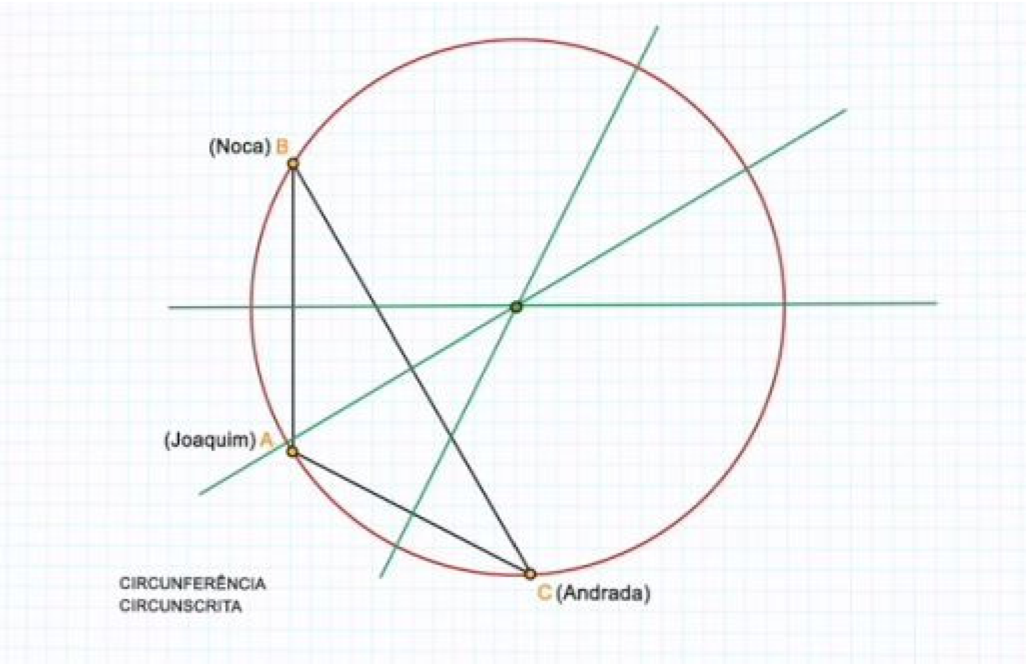

Figura 5: circuncentro externo ao triângulo.

Mesmo com uma quantidade maior de caminho a ser construída, a sugestão de montar a horta no circuncentro foi bem recebida pela comunidade, pois não prejudicaria nenhuma das famílias. Mas João surge com um novo problema: mais uma família deseja entrar no mutirão.

Nesse caso, só seria possível construir a horta num ponto eqüidistante às quatro casas se o ponto referente à casa de Seu Raimundo, o novo participante do mutirão, estivesse contido na circunferência. Fato que não acontece. Desta forma, tomados três a três, esses quatro pontos determinam quatro circunferências, cada uma com uma das casas de fora.

Um ponto eqüidistante não será encontrado, mas matematicamente ainda é possível encontrar o ponto que minimize a soma das distâncias, porém, a menos que os pontos formem um quadrilátero simples, bem conhecido, este problema pode tornar-se bastante complexo.

No final do vídeo, os personagens ainda mencionam outros pontos notáveis do triângulo, como o baricentro, encontro das medianas,

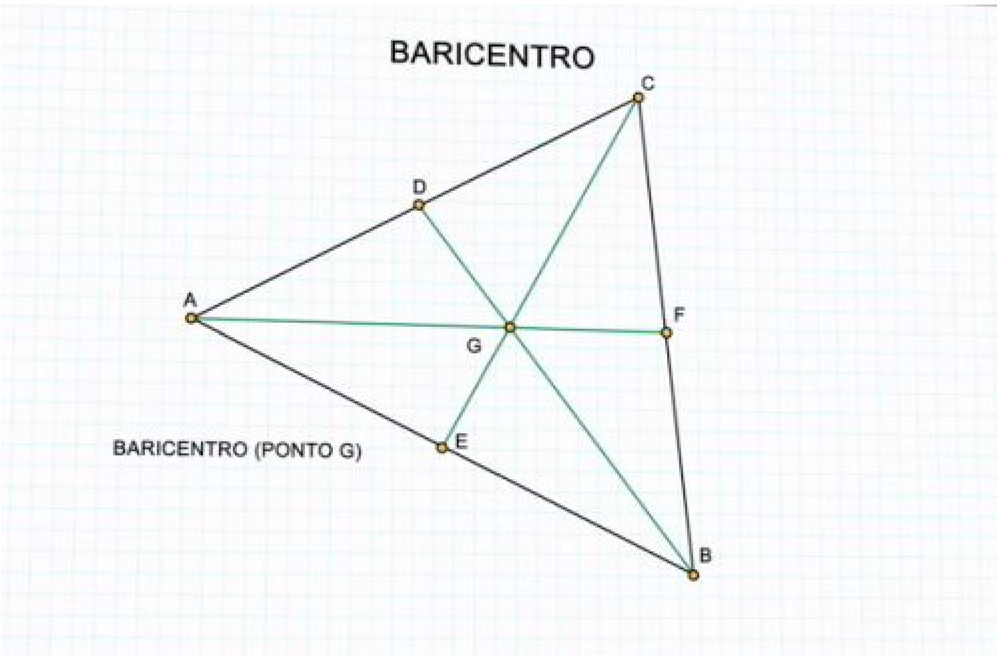

Figura 6: baricentro

o ortocentro, encontro das alturas,

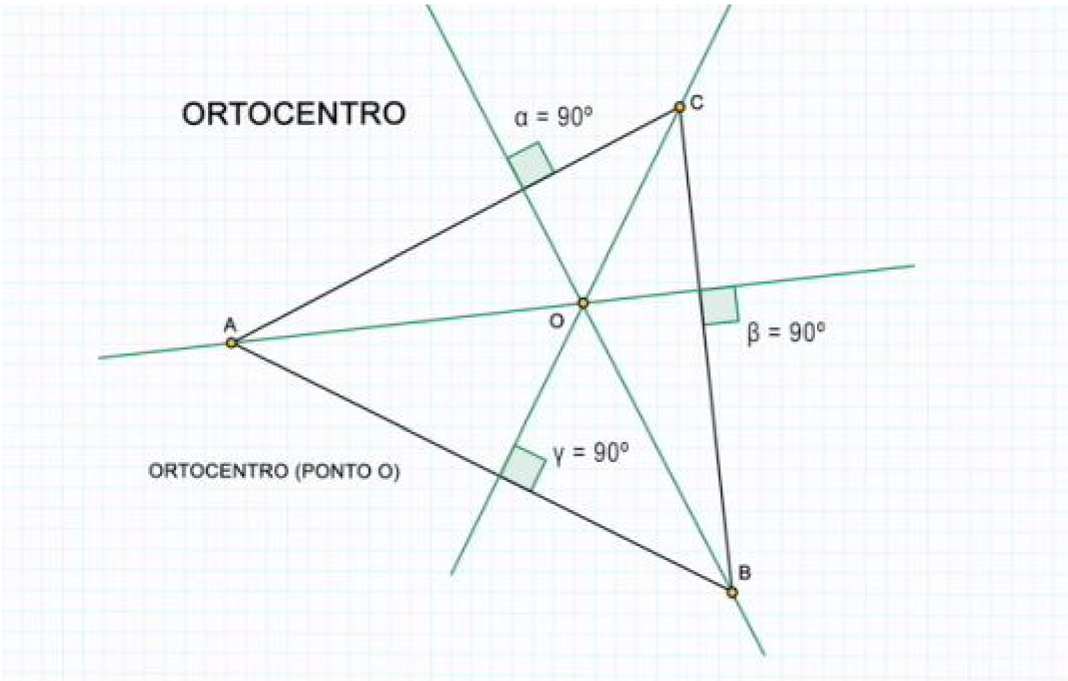

Figura 7: ortocentro.

e o incentro, encontro das bissetrizes. O incentro é também o centro da circunferência inscrita no triângulo.

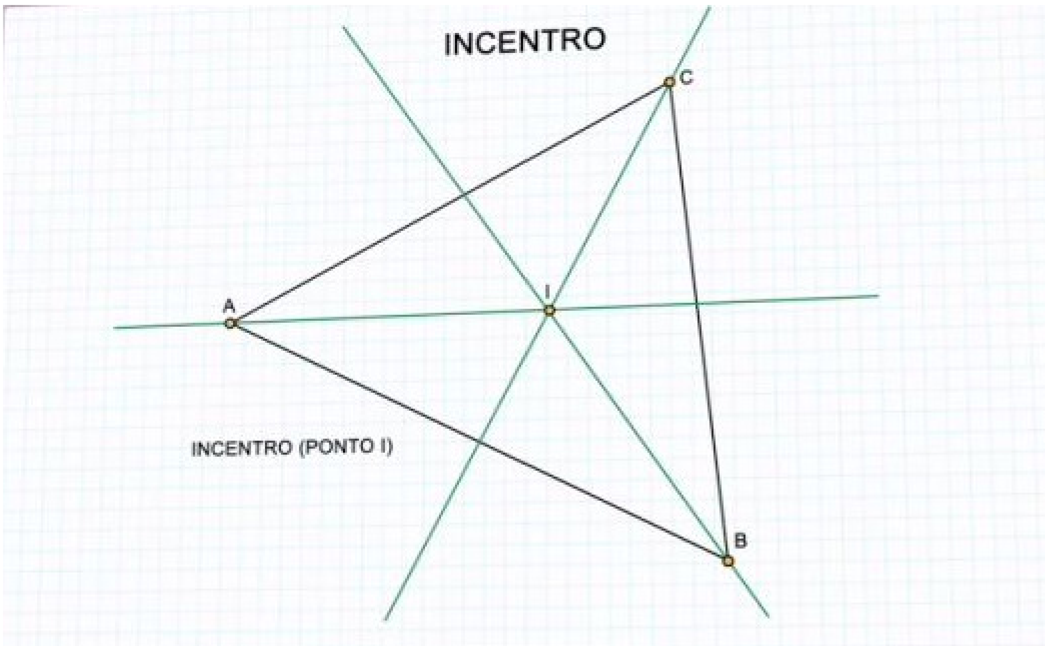

Figura 8: incentro.

Um fato interessante, demonstrado pelo matemático suíço Leonhard Euler, é que baricentro, ortocentro e circuncentro são colineares, mais ainda, a distância entre o baricentro e o circuncentro é a metade da distância entre o baricentro e o ortocentro.

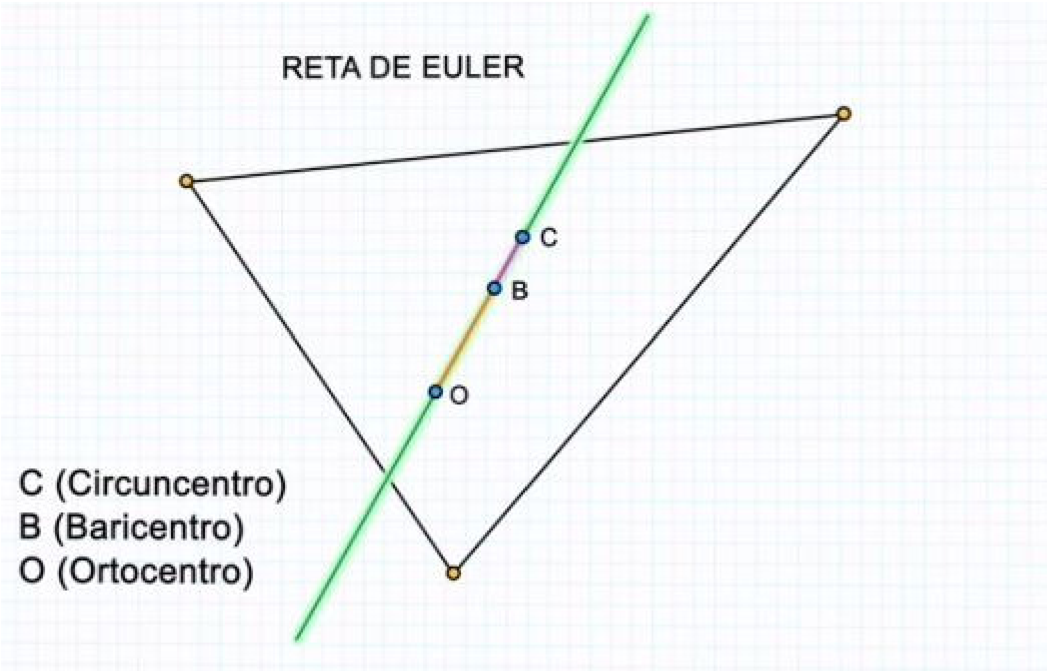

Figura 9: Reta de Euler.

A reta que passa por esses três pontos é chamada de reta de Euler, e a relação entre eles é válida para qualquer triângulo como vemos na animação contida no vídeo.

Sugestões de atividades

Depois da execução

Como exercício de fixação, peça aos alunos que marquem três pontos em uma folha A4 e realizem o procedimento para obter o circuncentro utilizando régua e compasso. Em seguida, peça que verifiquem se o ponto encontrado é realmente equidistante ao demais.

Agora, em duplas, sugira que discutam o caso de quatro casas. Verifique se eles consideram fatores como a possibilidade de haver um ponto equidistante às casas, ou se discutem formas de encontrar o ponto que minimiza a soma das distâncias. Por fim, peça-os que mostrem o ponto em que pensam que a horta deva ser construída e apresentem seus argumentos para tal escolha.

Como atividade adicional, sugerimos o Experimento *Onde fica a lixeira?*, que trata de um problema semelhante e complementa este material.

Ficha técnica

Autor do Guia *Rafael Santos de Oliveira Alves*
Conteudista *Leonardo Barichello*
Revisão *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Caio José Colletti Negreiros*
Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*