Matemática Multimídia

Análise de dados e probabilidade

Guia do Professor

Vídeo

Coisas do amor

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Aplicar o cálculo de probabilidades;
2. Definir probabilidade condicional;
3. Introduzir cadeias de Markov.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Coisas do amor

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Probabilidade Condicional.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Aplicar o cálculo de probabilidades;
2. Definir probabilidade condicional;
3. Introduzir cadeias de Markov.

Sinopse
Juliana precisa saber com quem sua irmã sairá daqui a três dias. Com ajuda de seu irmão, define um modelo matemático de probabilidades condicionais que pode responder a sua pergunta.

Material relacionado
Áudios: *Fraude 171;*
Experimentos: *Jogo da trilha; Peixes no Lago;*
Softwares: *Probabilidade com urnas.*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa aborda o conceito de probabilidade condicional.

Mais precisamente, consideremos um experimento aleatório, E, e seu espaço amostral associado S, isto é, S é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento E. Chamamos evento qualquer subconjunto observável *A* de S.

Uma probabilidade é uma função real que a cada evento *A* atribui um valor entre 0 e 1, *P(A)*, que representa a chance do evento acontecer.

Dados dois eventos *A, B*, com *P(B)* diferente de 0, definimos a probabilidade condicional de *A* dado *B*, e a denotamos *P(A|B)*, como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Intuitivamente, *P(A|B)* nos indica a probabilidade do evento *A* ao saber ou supor que o evento *B* ocorreu. A definição anterior nos mostra como atualizar uma probabilidade (a do evento *A*) em face de uma nova informação (ocorrência do evento *B*).

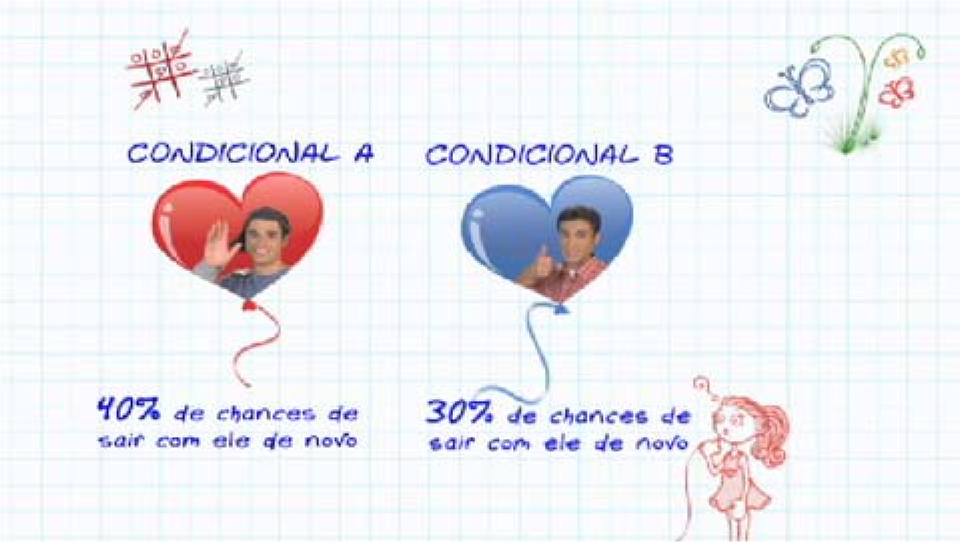

Figura 1: atribuição das probabilidades condicionais

Neste filme, as personagens descrevem um comportamento por meio de probabilidades condicionais. Os eventos considerados são:

A_i – Tita sai com o Jorge no dia i

B_i – Tita sai com o Zeca no dia i

e as probabilidades estabelecidas são as probabilidades condicionais de cada evento no dia i, sabendo (ou assumindo) o evento que ocorreu no dia anterior, i-1.

Conhecendo o evento que ocorre em um instante inicial, dia i=0, o problema é descobrir qual evento ocorrerá três dias depois, no dia i=3.

O modelo matemático associado a este tipo de informações é chamado cadeia de Markov: a probabilidade de um evento em um dado instante depende de conhecer qual evento ocorreu no instante anterior.

Este tipo de modelo nos permite prever a probabilidade do evento de interesse no dia seguinte, três dias depois ou em qualquer instante futuro, desde que as informações utilizadas na construção do modelo, ou seja, as probabilidades condicionais, continuem válidas no tempo.

Assim como a equação do movimento nos permite determinar a posição de uma partícula em um dado instante a partir de uma posição inicial, uma cadeia de Markov nos permite determinar a probabilidade dos eventos em um dado instante a partir de uma probabilidade inicial. A equação do movimento neste caso é dada por

$$P_n = M^n P_0 \ ,$$

onde P_0 representa a distribuição de probabilidade no instante $i=0$, P_n, a distribuição de probabilidade no instante n, e M é a matriz de transição, que indica as probabilidades condicionais descritas pelo problema.

Desta forma um problema de probabilidade, com uma solução algébrica usualmente trabalhosa, pode ser resolvido através do produto de matrizes rapidamente.

No exemplo do vídeo, temos dois possíveis resultados, de modo que P_n é um vetor com duas componentes que indicam a probabilidade de cada um dos resultados. Como sabemos que no dia $i=0$, Tita sai com Jorge, então $P_0=(1,0)$, indicando que a probabilidade de sair com o Jorge nesse dia é igual a 1.

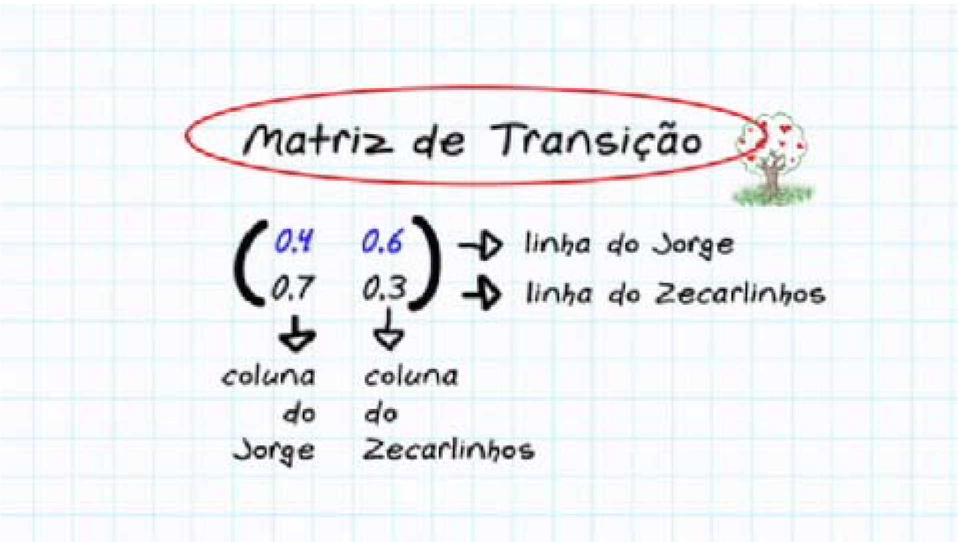

Figura 2: matriz de transição

A matriz M é uma matriz 2x2, indicando as probabilidades condicionais dadas no problema. As linhas representam com quem Tita sai no dia *i* (Jorge ou Zeca, respectivamente), e as colunas, com quem Tita sai no dia *i*+1 (Jorge ou Zeca, respectivamente). As entradas da matriz são as probabilidades condicionais do evento do dia i+1 sabendo (ou supondo) o evento do dia i.

Observe que as linhas desta matriz têm soma igual a 1, já que cada linha contém as probabilidades de todos os possíveis resultados para o dia i+1.

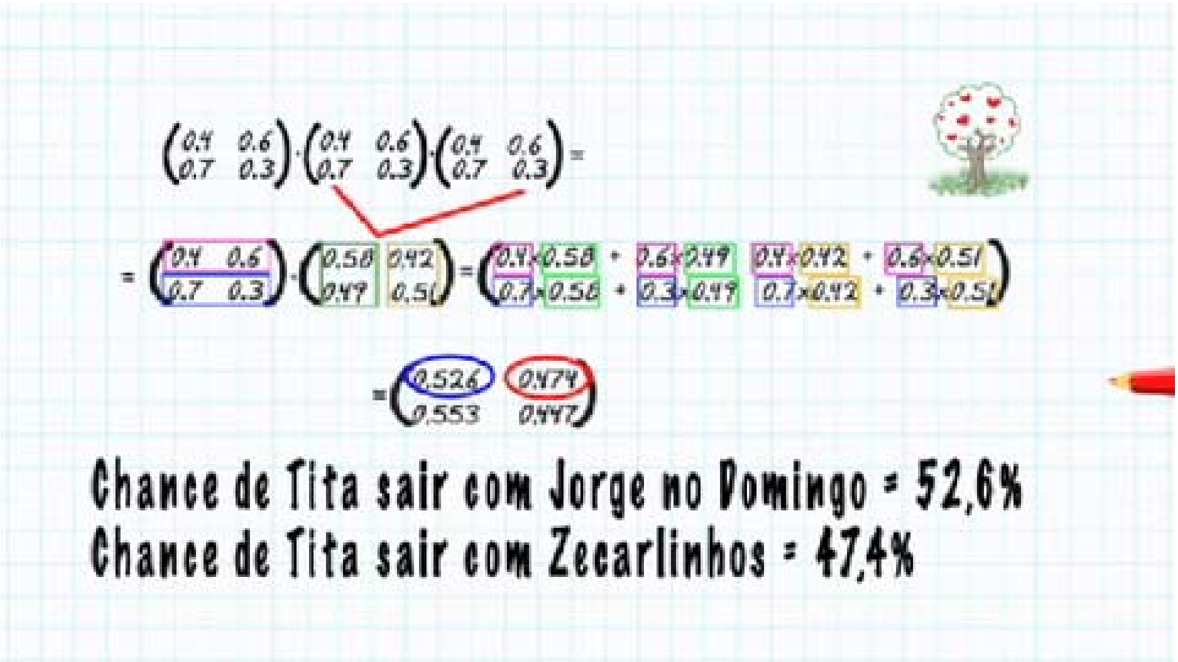

Figura 3: cálculo das probabilidades para o 3º dia

Sugestões de atividades

Antes da execução

Alguns dos experimentos e softwares da coleção M³ trabalham com o conceito de probabilidade condicional.

Em particular, o software *Probabilidade com Urnas* apresenta atividades com extrações (com ou sem reposição) de bolinhas coloridas de uma urna para aproximar a proporção de bolinhas de cada cor dentro da urna.

Também o experimento *Jogo da Trilha* trabalha com probabilidades condicionais em um jogo de lançamento de dados. O artigo de Rifo descreve detalhadamente o resultado com dados de duas faces (em outras palavras, com moedas). E o experimento *Peixes no Lago* utiliza probabilidades condicionais para estimar a quantidade de peixes em um lago.

Uma destas atividades poderia ser realizada antes de assistir ao vídeo, para que os alunos adquiram familiaridade com a noção de probabilidade condicional.

Depois da execução

O cálculo de probabilidades condicionais pode ser pouco intuitivo se não seguirmos a definição formal. Que tal desafiar seus alunos a resolverem os problemas a seguir?

Desafio 1
Edwiges vai ao mercado, passando por três vendinhas: a frutaria, a padaria e o açougue. Na saída do mercado, passa na banca de jornal. Quando chega ao carro, percebe que esqueceu a chave em uma das lojas. Ela acha que a chave pode estar na banca com 40% de chance, e no mercado com 60% de chance, em qualquer uma das três vendinhas. Volta para o mercado e não encontra a chave nem no açougue e nem na frutaria. Qual é a chance de que a chave esteja na padaria?

R. Observemos que inicialmente a probabilidade de estar na padaria é de 20%, já que cada vendinha dentro do mercado tem a mesma chance. E inicialmente a chance da banca de jornal é de 40%, que é o dobro da chance da padaria.

Depois de eliminar a frutaria e o açougue, as probabilidades da padaria e da banca não são mais 20% e 40%, pois estas não somam 1, como deveria ser. No entanto, a razão entre suas probabilidades não mudam, já que a informação de que a chave não está nem na frutaria nem na peixaria não a altera.

Assim, as chances da padaria e da banca estão na proporção de 1 para 2, como inicialmente. Portanto a probabilidade de que a chave esteja na padaria é 1/3 e de que esteja na banca é 2/3, cuja soma é 1, e cuja razão é de 1 para 2.

Mais formalmente, definamos os eventos: a chave está em

A – açougue; F – frutaria; P – padaria; B – banca de jornal.

Temos P(A)=P(F)=P(P)=0,2 e P(B)=0,4.

Ao excluir a frutaria e o açougue, temos que ocorreu o evento $(A \cup F)^c$, cuja probabilidade é 1- (0,2+0,2)=0,6.

Então

$$P\left(P \mid (A \cup F)^C\right) = \frac{P\left(P \cap (A \cup F)^C\right)}{P\left((A \cup F)^C\right)} = \frac{P(P)}{0{,}6} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$$

Desafio 2

Seu novo vizinho tem dois gatos, e você ouviu que o nome de um dos gatos é “boneca”. Você conclui que um dos gatos é fêmea. Qual é a probabilidade de que o outro gato seja macho?

R. Este problema tipicamente recebe a resposta de que a chance do outro gato ser macho é 1/2, já que podemos supor que para um gato qualquer a chance de ser macho é a mesma de ser fêmea.

No entanto, aqui não estamos falando de um gato qualquer; estamos falando do outro gato em um par de gatos, ao saber que um deles é fêmea.

Portanto, comecemos estabelecendo o problema em um contexto mais formal.

Como temos um par de gatos, denotando fêmea por F e macho por M, o espaço amostral é

$$S = \{ (F,F), (F,M), (M,F), (M,M)\}$$

onde o par representa o gênero de cada um dos gatos, em ordem. Esta ordem pode ser o gato mais velho e o mais novo; ou o gato branco e o cinza; ou o do lado esquerdo e o do lado direito.

O importante é perceber que, distinguindo os gatos, este espaço amostral é equiprovável, ou seja, cada um dos quatro resultados têm mesma probabilidade igual a 1/4.

Assim, a chance dos dois serem fêmeas é 1/4 e a chance de ter um casal é igual a 1/4 + 1/4 = 1/2 , pela soma das probabilidades dos resultados (F,M) e (M,F).

Portanto, pela definição de probabilidade condicional, temos

$$P(\{(F,M),(M,F)\} \mid \{(F,F),(F,M),(M,F)\}) =$$
$$= \frac{P(\{(F,M),(M,F)\})}{P(\{(F,F),(F,M),(M,F)\})} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$$

Como podemos ver, sabendo que um dos gatos é fêmea, é duas vezes mais provável que o outro seja macho do que seja fêmea.

Desafio 3

Consideres as condições do problema descrito no vídeo para as probabilidades condicionais descritas por Juliana. Suponha que na 5ªf, Tita vai sortear com quem sair lançando uma moeda balanceada, de modo que tanto Jorge quanto Zeca têm probabilidade 1/2 de ser sorteado. Na equação da cadeia de Markov, isto significa considerar P_0=(1/2 , 1/2).

O que acontece com as probabilidades de Tita sair com Jorge no dia seguinte? E dois dias depois? E 234 dias depois (supondo que a situação não mude até lá)?

Sugestões de leitura

W. Feller (1976). Introdução à Teoria das Probabilidades e suas Aplicações, vol I. Editora Edgard Blücher.
P. Meyer (2000). Probabilidade: Aplicações à Estatística. Editora LTC.
L. Rifo (2007). A outra face da moeda honesta. Revista do Professor de Matemática, 54: 5-8.
Site recomendado: ALEA – Acção Local de Estatística Aplicada, http://alea-estp.ine.pt

Ficha técnica

Autor: *Laura Leticia Ramos Rifo*
Revisão: *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*