Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Um certo fator de escala

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar a relação entre áreas de figuras semelhantes;
2. Apresentar a relação entre volumes de objetos semelhantes.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Um certo fator de escala

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Figuras semelhantes, razão de semelhança. Relações entre áreas e volumes de figuras semelhantes.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar a relação entre áreas de superfícies semelhantes;
2. Apresentar a relação entre volumes de objetos semelhantes.

Sinopse
O jovem Sérgio solicita auxílio do arquiteto Carlos para construir uma maquete do Pavilhão Lucas Nogueira Garcez, conhecido por Oca, projetado pelo arquiteto Oscar Niemeyer. Ao construir a maquete, Sérgio descobre importantes relações entre áreas e volumes de figuras semelhantes.

Material relacionado
Experimentos: *Arco capaz e navegação, Qual é a área do quadrilátero? Engenharia de grego;*
Vídeos*: Quadra poliesportiva, Entrando pelo túnel;*
Softwares: *Determinantes e áreas*.

Introdução

Sobre a série

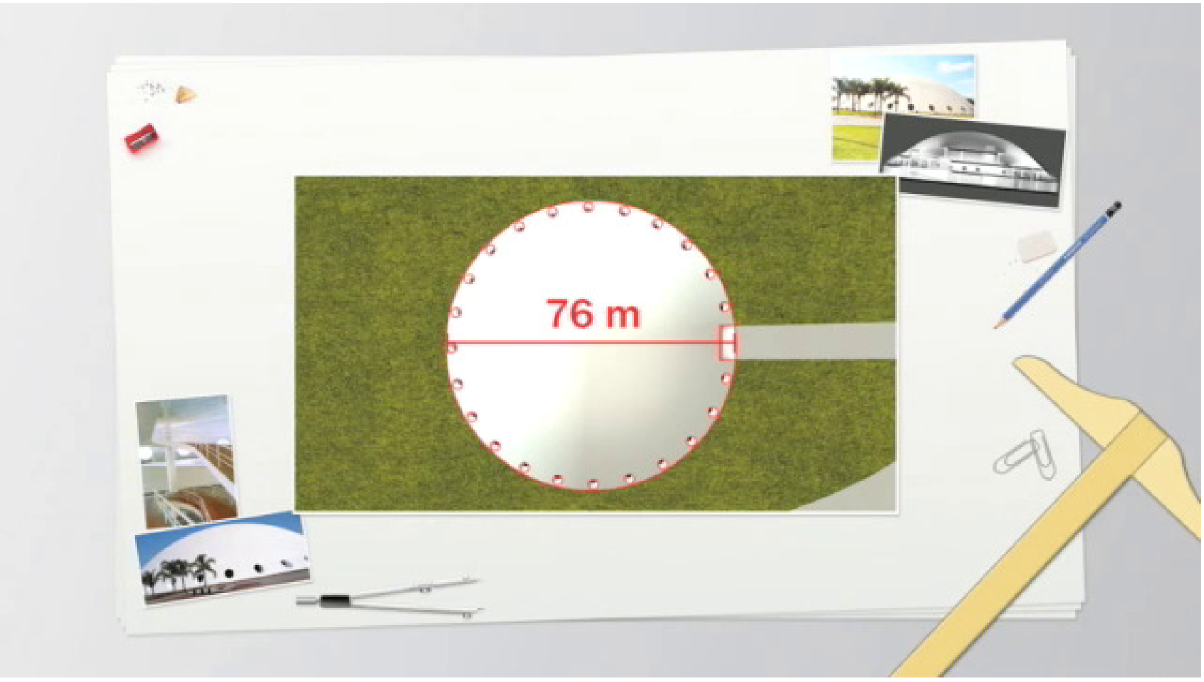
A série *Matemática na Escola* aborda o conteúdo de matemática do Ensino Médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático; além disso, pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa e conceitos abordados

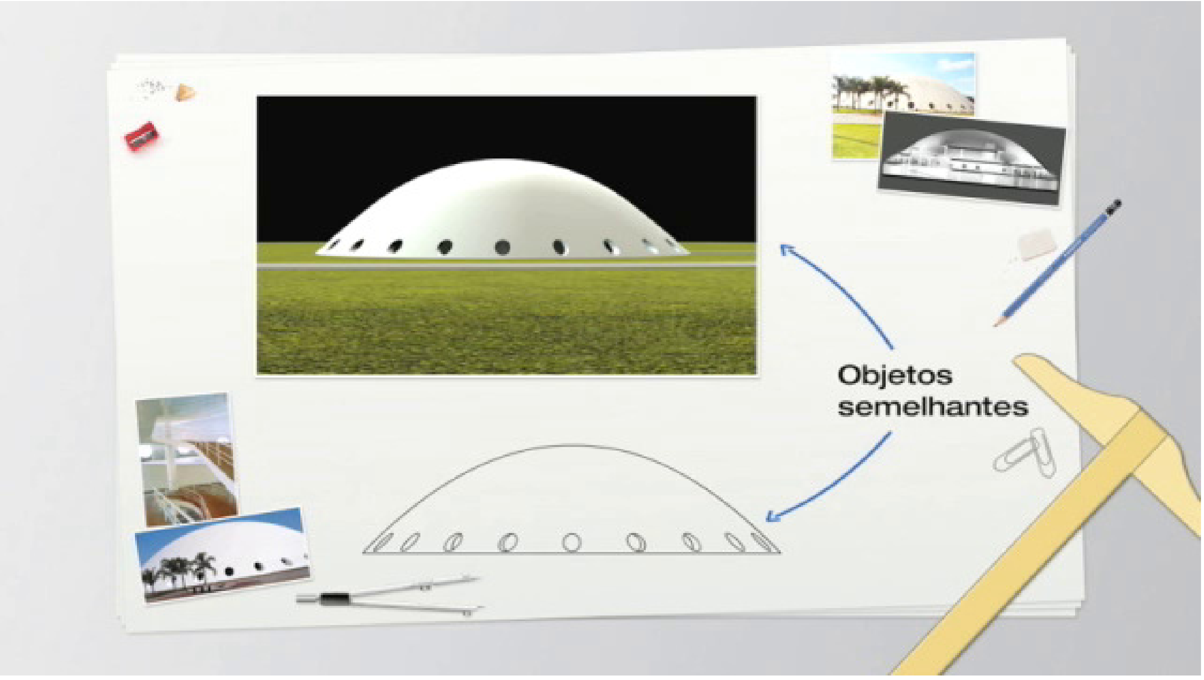
O jovem Sérgio solicita auxílio do arquiteto Carlos para construir uma maquete do Pavilhão Lucas Nogueira Garcez, conhecido por Oca, projetado pelo arquiteto Oscar Niemeyer. Ao construir a maquete, Sérgio descobre importantes relações entre áreas e volumes de figuras semelhantes.

Em 1951, o então governador do Estado de São Paulo Lucas Nogueira Garcez instituiu uma comissão para decidir sobre a construção do Parque do Ibirapuera para que se tornasse um dos marcos das comemorações do VI centenário da cidade de São Paulo. O arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer, um dos mais influentes nomes da Arquitetura Moderna Internacional, foi o responsável pelo projeto arquitetônico do parque, e Roberto Burle Marx se responsabilizou pelo projeto paisagístico. O **Parque do Ibirapuera foi entregue a São Paulo em** 21 de agosto de 1954. Atualmente, muitas são as atrações do parque disponíveis aos visitantes. Entre as atrações, está o Pavilhão Governador Lucas Nogueira Garcez, também denominado Oca, que é um espaço utilizado para exposições temporárias e eventos.

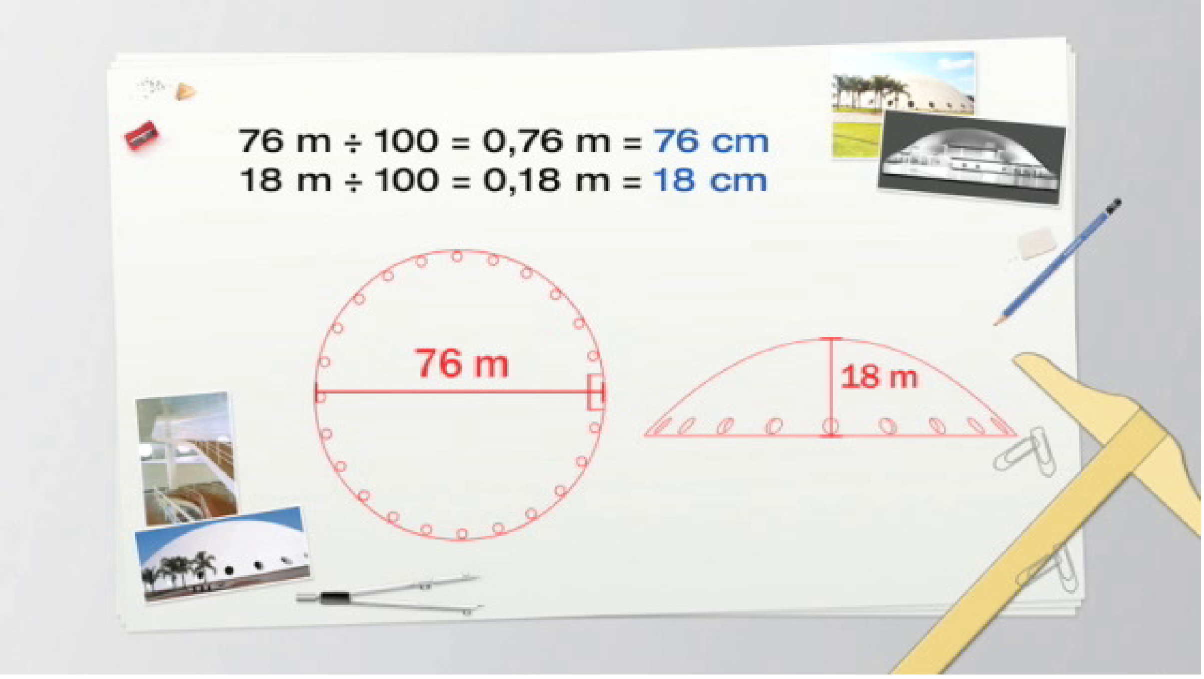
No programa, o jovem Sérgio faz uma pesquisa na internet e toma conhecimento de alguns detalhes da Oca: a base da Oca é circular e tem 76 metros de diâmetro e a medida desde o chão até o ponto mais alto é 18 metros.



A Oca e a maquete devem ser dois objetos semelhantes.

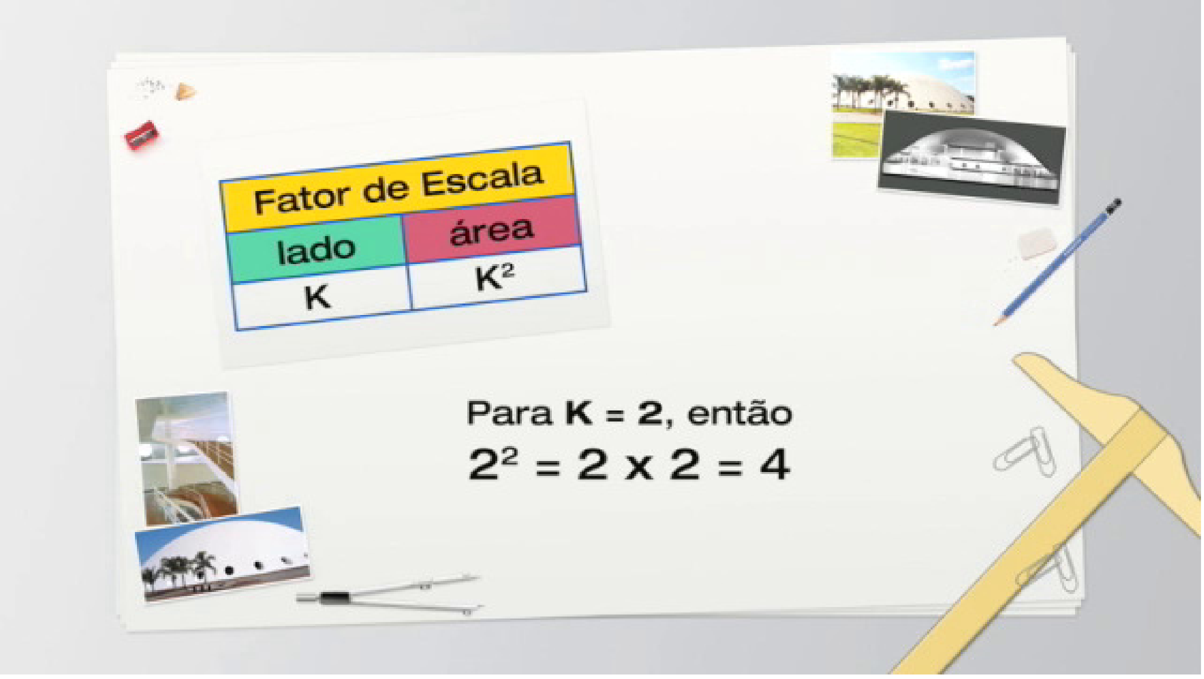


Sérgio decide que as medidas da maquete serão tais que as medidas da Oca serão 100 vezes maiores do que as medidas da maquete, ou seja, o fator de escala será igual a 100. O diâmetro da base da maquete será 76 centímetros e a altura 18 centímetros.



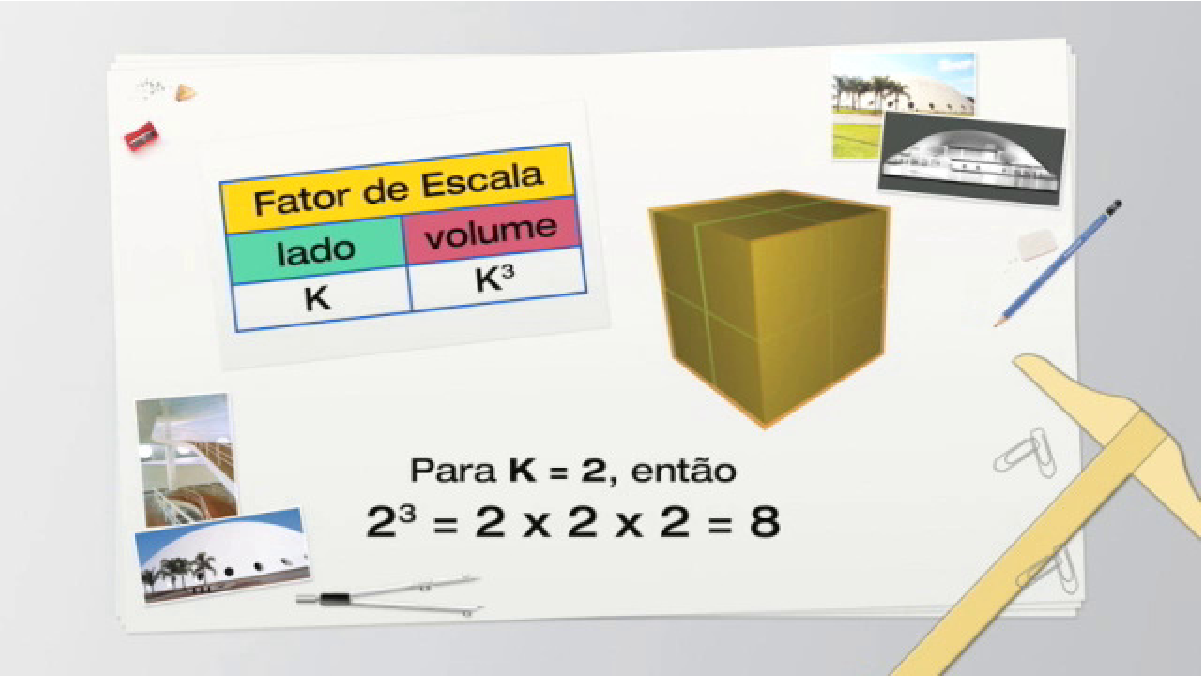
Para pintar a maquete, Sérgio utilizou um potinho inteiro de tinta. Uma pergunta natural que surge é: quantos potinhos de tinta serão necessários para pintar a Oca?

Diante da dúvida de Sérgio, Carlos apresenta explicações sobre a relação entre áreas de figuras semelhantes.



Sérgio faz cálculos e conclui que para pintar a Oca são necessários dez mil potinhos de tinta, pois o fator de escala entre a maquete e a Oca é 100, assim, o fator entre as áreas é 100^2 (foi utilizado um potinho para pintar a maquete).

A próxima pergunta que surge é sobre a relação entre os volumes da maquete e da Oca. O arquiteto Sérgio mostra como comparar os volumes de dois objetos tridimensionais semelhantes.



Novamente, considerando a explicação de Carlos, Sérgio conclui que a relação entre os volumes da maquete e da Oca é igual a 100^3 e, assim, a Oca ocupa um espaço um milhão de vezes maior do que o espaço ocupado pela maquete. Também, ele percebe que, se tiver um milhão de maquetes iguais a que ele construiu, todas juntas ocuparão um espaço igual ao da Oca e ele precisará de um milhão de potinhos de tinta para pintar todas as maquetes. Isso acontece porque, embora o volume de um milhão de maquetes seja igual ao volume da Oca, a soma das áreas das superfícies de todas estas maquetes será 100 vezes a área da superfície da Oca.

Figuras semelhantes
Figuras no plano ou no espaço que têm a mesma forma, mas tamanhos eventualmente diferentes, são chamadas semelhantes. Assim, por exemplo, um prédio e sua maquete são semelhantes. A noção de semelhança pode ser dada precisamente como se segue. Uma referência para um estudo deste conceito e propriedades relacionadas é [Lima,1991] dada nas sugestões de leitura.

Sejam F e F' figuras, do plano ou do espaço, e r um número real positivo. As figuras F e F' são **semelhantes**, com razão de semelhança ou **fator de escala** r, quando existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de F e os pontos de F' de forma que se X e Y são pontos quaisquer de F e X' e Y' os pontos correspondentes em F', então a medida do segmento X'Y' é igual a r vezes a medida do segmento XY, ou seja, m(X'Y')=r.m(XY). O número r é chamado fator de escala entre as figuras. Se r for menor do que um, temos que a figura F' será uma redução da figura F. Se r for maior que um, F' será uma ampliação da figura F. Dois triângulos com ângulos iguais dois a dois são semelhantes. Dois quadrados são sempre semelhantes. Também dois círculos ou duas esferas são sempre semelhantes. Dois retângulos com lados correspondentes na mesma proporção são semelhantes.

Se duas figuras F e F’ são semelhantes por um fator de escala r, qualquer medida de comprimento em F estará multiplicada por r na sua correspondente em F’. Este fato pode ser verificado diretamente no caso de segmentos. No caso de uma curva, isso pode ser mostrado usando limites e suas propriedades (como estudado nos cursos de Cálculo), aproximando-a por linhas poligonais com lado cada vez menores.

Relação entre áreas de figuras semelhantes
Se duas figuras F e F’ são semelhantes por um fator de escala r, qualquer medida de área em F estará multiplicada por r^2 na sua correspondente em F’. Esse fato pode ser visto diretamente no caso de um triângulo, retângulo ou paralelogramo. No caso de outras figuras planas ou de uma superfície no espaço, isso pode ser mostrado usando limites e suas propriedades (como estudado nos cursos de Cálculo), aproximando-as por uma reunião de retângulos ou paralelogramos cada vez menores.

Relação entre volumes de figuras semelhantes
Se dois sólidos F e F’ são semelhantes por um fator de escala r, o volume em F’ será o volume de F multiplicado por r^3. Esse fato pode ser verificado diretamente no caso de um paralelepípedo. No caso de um sólido qualquer, isso pode ser mostrado usando limites e suas propriedades (como estudado nos cursos de Cálculo), aproximando-o por uma reunião de paralelepípedos cada vez menores.

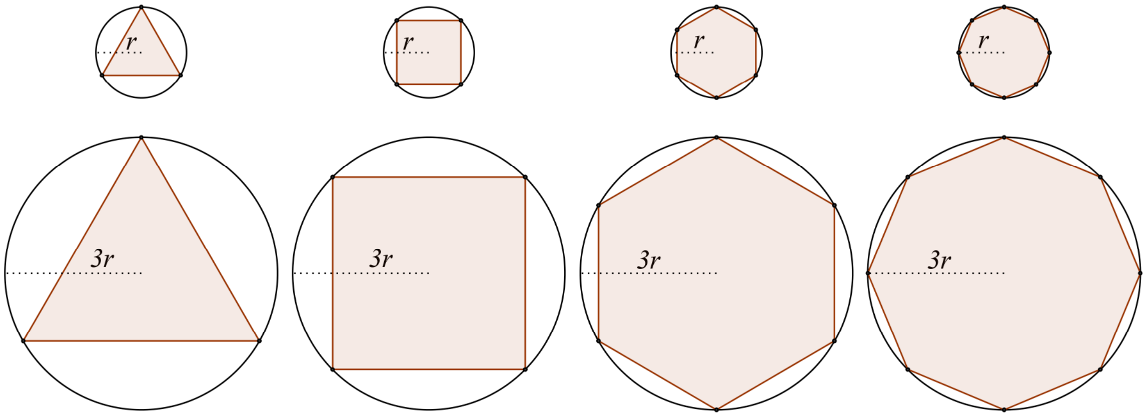
Sugestões de atividades para os alunos

Antes da execução

Peça aos alunos que desenhem quatro circunferências de um determinado raio r e mais quatro circunferências de raio igual a 3r. A seguir, que inscrevam um triângulo equilátero, um quadrado, um hexágono regular e um octógono regular em cada das circunferências de raio r e, de modo análogo, em cada uma das circunferências de raio 3r. Convém notar que as figuras são semelhantes a um fator de escala igual a 3. Proponha as seguintes questões:

- Determinar os perímetros e as áreas exatas das oito figuras em função do raio r da circunferência menor.

- Descobrir a relação entre os perímetros das figuras grandes e pequenas, e a relação entre as suas áreas.



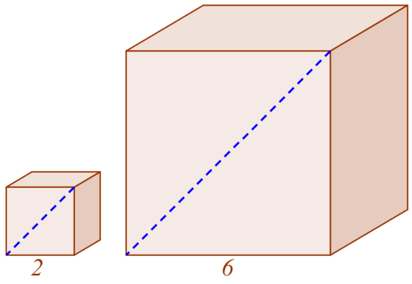
Depois da execução

Atividade 1

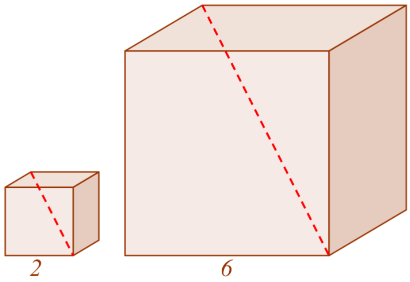
Considerar cubos de lados *2 cm* e *6 cm* (Fator de escala igual a *3*).

- Calcular a área da superfície total dos cubos. Qual é a razão entre a área da superfície total do cubo maior pela área da superfície total do cubo menor?

- Calcular as medidas das diagonais das faces dos dois cubos. Qual é a razão entre a medida da diagonal da face do cubo maior pela medida da diagonal da face do cubo menor?

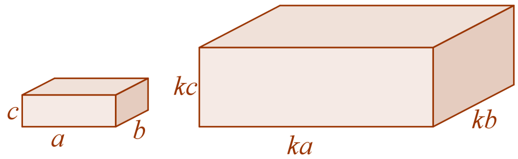


- Calcular as medidas das diagonais dos dois cubos. Qual é a razão entre a medida da diagonal cubo maior pela medida da diagonal do cubo menor?



Atividade 2

Considerar o paralelepípedo de medidas *a*, *b*, *c* e o paralelepípedo de medidas *ka*, *Kb*, *kc*, onde *k* é um número real positivo.



- Determinar a razão entre a área da superfície total do segundo paralelepípedo pela área da superfície total do primeiro.

- Determinar a razão entre o volume do segundo paralelepípedo pelo volume do primeiro paralelepípedo.

Atividade 3

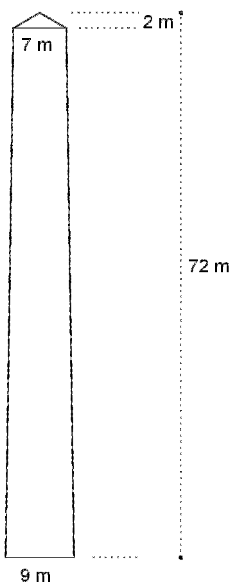
Considere duas pirâmides de bases quadradas semelhantes tais que a maior tem superfície externa 16 vezes a da menor. Se a menor tem altura de 4 metros e volume de 12 metros cúbicos, dê as medidas do lado da base, da altura e do volume da pirâmide maior.

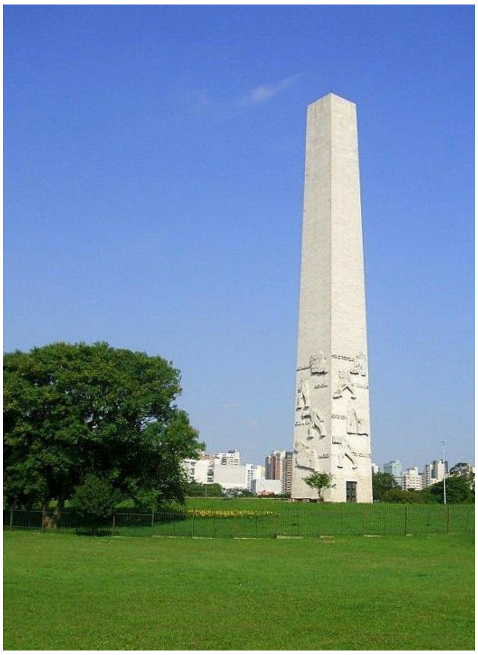
Atividade 4

Como arranjar 1000 cubinhos de gelo de modo que eles formem um objeto com a menor superfície externa e, portanto, derretam o mais lentamente possível? E se forem só 100 cubinhos?

Atividade 5

O Obelisco do Ibirapuera é um projeto do escultor italiano Galileo Emendabili. Ele tem 72 metros de altura e foi inaugurado em 1955, um ano após a inauguração do Parque do Ibirapuera. A base do monumento é quadrangular de lado igual a 9 metros. Suas secções planas paralelas à base são também quadrangulares e diminuem progressivamente até chegar a uma secção plana quadrada de 7 metros de lado, tendo a partir daí sua cúpula em forma de uma pirâmide de base quadrangular com altura igual a 2 metros. Quem olha o obelisco de frente vê um trapézio isósceles cuja base maior, no chão, tem 9 metros e a base menor tem 7 metros onde se inicia a pirâmide da cúpula.





- Escolha um fator de escala para construir uma maquete do obelisco e faça um esboço indicando as medidas.

- Quantos centímetros quadrados de papelão são necessários para fazer a maquete do obelisco com o fator de escala escolhido.

- Qual é a relação da área externa do obelisco com a área correspondente da maquete.

- Providencie material suficiente e fazer a maquete.

Referências Bibliográficas e Sugestões de leitura

LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*. vol. 2, Coleção do Professor de Matemática, (3ª Edição). Rio de Janeiro: SBM, 2000.

COSTA, Sueli I. R.; GROU, Alice; Passos, Fernando. *Programa de vídeo: Observando a Natureza*. Editora da Unicamp, 2002.

Ficha técnica

Autoras: *Claudina Izepe Rodrigues e Sueli I. R. Costa*
Revisor: *Roberto Limberger*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico: *Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*